

# Inércia da Energia

## Gravitação

## Relatividade

Energia tem massa. Se se empurra um corpo há que se empurrar sua energia, além do próprio corpo. Em alta velocidade a energia torna-se tão grande—a massa é tão grande—que ao empurrar acelera-se pouco. E quanto mais se empurra cada vez se acelera menos. É impossível ultrapassar a velocidade limite, por mais que se empurre.

# Conteúdo

O Cidadão e a Teoria da Relatividade 3

01/16 Inércia da energia 5

02/16 Limitada 7

03/16 Exatamente 9

04/16  $m(v)$  10

05/16 Outra dedução, equivalente 11

06/16 Ideia da velocidade limite 11

07/16 Ladrilhos e moluscos 12

08/16 A lei da gravidade 14

09/16 Campo 17

10/16 Paisagem 19

11/16 Nula 20

12/16 Curvo 22

13/16 Precessão de um satélite. 24

14/16 Transformações de Lorentz 24

15/16 Um exercício sobre transformações de Lorentz 30

16/16 Manutenção das equações de Maxwell sob transformações de Lorentz 34

Sobre o tempo 35

Referências 36

Sinopse 36

# O Cidadão e a Teoria da Relatividade.

A *Teoria da Relatividade*, com suas previsões sobre fenômenos repetida e universalmente verificadas, encerra informações sobre a natureza que devem participar do esclarecimento de todo cidadão moderno, de qualquer eventual especialização.

Em primeiro lugar, a energia possui *inércia*. Esta é a propriedade de um corpo de resistir a uma alteração de seu estado de movimento. É quantificada pela grandeza física *massa*.

Todo corpo possui massa. Se imaginarmos um ente com massa nula, ele avançaria com velocidade desmedidamente alta ao interagir com outro corpo, enquanto este não recuaria. Ou seja, o ente já não estaria aqui, e sequer a interação fora percebida. Ou ele jamais interage, o que é a mesma coisa que não existir do ponto de vista físico.

A massa da energia é expressa pela fórmula universal  $e = m.c^2$ , onde  $c$  é a velocidade de 300.000 quilômetros por segundo (299.792.458 metros por segundo exatamente, pela definição de metro; a velocidade é tão fundamental, universal, que a própria definição de metro foi alterada para ser a *distância que a luz se propaga no vácuo em 299.792.458 avos de segundo*). A massa de uma unidade de energia (*joule*) é  $\frac{m}{e} = \frac{1}{c^2} = 0,000000000000000011$  quilogramas, por joule; são dezesseis zeros à direita da vírgula).

A massa é muito pequena—por isso não percebemos quotidianamente a inércia alterada dos corpos que possuem energia acumulada—mas não é nula. Daí advém a existência de uma velocidade máxima na natureza igual a  $c$ —em princípio. (Note-se que não se trata de dificuldade técnica.) Porque à medida que se acelera um corpo torna-se necessário acelerar também sua energia cinética, e quanto mais se acelera, a massa aumenta sem limites—em outras palavras, torna-se cada vez mais difícil acelerar—à medida que a velocidade se aproxima de  $c$ . Isto se deduz matematicamente. E é verificado universalmente.

Em segundo lugar, as leis fundamentais da natureza são locais, isto é, relacionam grandezas físicas num lugar num instante. Todas as coisas são campos, ou seja, entes extensos que evoluem conforme leis de caráter local. Então, para se alterar um campo inicia-se alterando-o num ponto. A perturbação se propaga conforme as leis. Desde que qualquer interação envolve energia a velocidade de propagação é no máximo igual a  $c$ , independentemente da natureza do campo.

Numa parada de ônibus observamos uma lâmpada distante na próxima parada. A luz nos chega a 300.000 km/s. Ao partirmos no ônibus, a velocidade da luz que nos vem seria—imaginemos—300.000 km/s mais a velocidade do ônibus, certo? Errado. Pois ela de fato continua sendo 300.000 km/s.

A estrutura da matéria revela a existência de alguns tipos de campos elementares, que a constituem. O elétron por exemplo é um campo—não confundir com o campo eletromagnético. A luz é campo eletromagnético, em propagação. As leis do campo eletromagnético—leis locais—são as (quatro) *equações de Maxwell*. Destas se deduz a velocidade de uma perturbação no vácuo, que resulta 300.000 km/s.

Agora pois, um amigo em movimento com relação a nós executa experimentos de Eletromagnetismo. Verifica ele as mesmas equações de Maxwell. E deduz, e mede, a mesma velocidade de propagação  $c$ . Só existem os campos, com as mesmas leis funda-

mentais para todos os observadores.

Tal que velocidades comparáveis a  $c$  não sejam simplesmente somadas—como imagináramos no exemplo do ônibus—as réguas que se movem são mais curtas, os relógios evoluem mais lentamente, e dois acontecimentos distantes simultâneos para um observador não o são para outro em movimento relativo. A compreensão de tais aspectos pressupõe um traquejo em interpretações matemáticas, mas isso não é fundamental ou imprescindível ao cidadão.

Antes, na natureza só existem campos, com as mesmas leis (locais) para todos os observadores. Esta é a essência da Teoria da Relatividade, e a significação do seu nome.

Em terceiro lugar, o cidadão deve ser ilustrado com a noção de que o vácuo no universo, no qual os astros evoluem, é de fato preenchido por um campo—a *métrica*—universal, desde aqui até as galáxias mais distantes.

Ao se medir a parede de uma sala retangular—que resulta por exemplo “seis metros”—e a remedirmos ao longo de uma reta paralela no centro da sala, se obterá os mesmos “seis metros”. A característica que estabelece tal valor, no caso igual ao primeiro, é propriedade do campo *métrica*.

Não se empurra a métrica. Antes, ela está em todos os lugares. Mas a matéria curva esse campo. Dentro da matéria, e também próximo a ela, a métrica é curva. Próximo à matéria as réguas são mais curtas (na direção do raio) e os relógios evoluem mais lentamente.

A relação entre a densidade de matéria e a curvatura da métrica em cada ponto—lei local—é expressa pelas *equações de Einstein* da gravitação.

Um corpo abandonado livremente numa região onde a métrica é curva—e é curva porque existe um outro corpo perto—se aproxima deste outro corpo. Ou seja, cai.

Até o fim do século XIX a lei da gravitação dizia que os corpos se atraem com força inversa do quadrado da distância. Perguntemos o seguinte. Um corpo é trazido para próximo da Terra; como sabe ela a distância para aplicar a força correta? Não sabe. O planeta é inerte; não pode saber. Antes, o ambiente próximo é de tal forma diferente que o movimento de um corpo livre ali é acelerado. Fosse o lugar absolutamente vazio—nada mesmo—não teria propriedade para ser diferente. A métrica é diferente junto à matéria.

Curvar a métrica envolve muita energia. É aquela colocada no sistema quando se levanta um corpo.

Um raio de luz—que é de fato uma frente de onda—ao passar junto a um astro evolui mais lentamente na região mais próxima, e percorre trajetória curva; a luz é atraída. A velocidade é 300.000 km/s em todos os lugares, localmente, mas as coisas acontecem mais lentamente embaixo junto ao astro.

Uma teoria é um conjunto coerente de idéias. Uma teoria física é um tal conjunto verificado experimentalmente. A coerência da Teoria da Relatividade deve ser usada para educar as mentalidades que nascem neste mundo. Tenhamos confiança na teoria. Pois somente uma argumentação pertinente—mas muito pertinente mesmo—poderá apontar-lhe alguma limitação, e até hoje tal não existiu e não há indicação de que venha eventualmente a existir. Sábio é buscar conhecer melhor os argumentos que a sustentam.

## 01/16 Inércia da energia.

Os corpos apresentam *inércia*.

É a propriedade de reagir a uma tentativa de alteração do estado de movimento.

Um navio possui grande inércia; uma mosca possui pequena inércia.

A grandeza que quantifica a inércia de um corpo é a *massa (inercial)*.

*Grandezas* são as quantidades que variam, ou podem variar. Uma grandeza física é definida pelo procedimento utilizado para medi-la.

A massa (inercial) de um corpo é medida numa interação com outro corpo considerado como possuindo massa unitária. Longe de outros corpos—ou seja, num lugar distante dos planetas—coloca-se os dois corpos próximos, em repouso: o corpo que se deseja ter a massa medida, e o corpo padrão considerado como possuidor da massa unitária. Então, com auxílio de uma pequena mola, muito tênue, com inércia que pode ser considerada desprezível em relação às do corpo e da unidade, efetua-se uma interação. O corpo avança; a unidade recua. Se o corpo avança pouco enquanto a unidade recua, é massivo. Tem tantas unidades de massa quanto seu avanço é menor que o recuo. Se o corpo avança muito, é ligeiro, leve inercialmente. Tem tão pequena fração de unidade de massa quanto seu avanço é maior que o recuo.

A idéia de um corpo sem inércia é desprovida de nexos.

Pois um corpo de massa nula avançaria a velocidade desmedidamente alta enquanto a unidade não recua.

Ou seja, o corpo não é percebido numa interação. E já não estaria mais aqui.

Ou um tal corpo nunca interagiria, o que é a mesma coisa que não existir do ponto de vista físico.

Então repetindo, idéia de corpo sem inércia não é coerente com os fenômenos físicos conhecidos.

*Energia* é coisa física, localizada. Nós trabalhamos ou pagamos para ter energia. Está num tanque de combustível, numa mola comprimida, represa, explosivo, num projétil certo, etc..

Energia, como tudo com que se interage fisicamente, tem inércia. A inércia da energia é muito pequena. Por isso a humanidade viveu muitos séculos sem haver formado noção dessa inércia. Foi descoberta no início do século XX.

A massa de um *joule* de energia é 0,000000000000000011265 *quilogramas*. Dezesesseis zeros depois da vírgula.

Duas cargas elétricas de mesmo valor e sinais contrários são colocadas juntas.

Aproxima-se uma carga de prova e não se observa atração ou repulsão; entende-se que a carga total é nula.

Entende-se que a região ao redor das cargas encontra-se vazia; é o vácuo.

Afastemos então uma carga da outra. Não é fácil, porque elas se atraem. É necessário um trabalho externo, esforço, para afastá-las. E aproxima-se a carga de prova. Há atração (para uma das cargas; repulsão da outra).

Bem... se acontece alguma coisa ao redor das cargas afastadas... existe pois algo ali, físico. Já não é simplesmente vácuo. Se nada fosse, nada aconteceria.

O que ali existe é chamado de *campo elétrico*, com propriedades, localizado, e foi criado ao se haver afastado as cargas.

O campo tem inércia.

A massa das cargas afastadas é maior que a das cargas juntas.

Pois é a massa das duas cargas mais a massa do campo elétrico.

O sistema de cargas afastadas contém energia. Para criar o campo foi fornecida energia; a massa do campo é a massa da energia recebida.

$$e = mc^2 .$$

Energia igual massa vezes velocidade da luz ao quadrado.

A velocidade da luz é 300.000.000 m/s (trezentos milhões de metros por segundo). (Oito zeros<sup>1</sup>.)

A Lua se encontra a pouco mais que trezentos milhões de metros.

A luz vai da Terra à Lua em (pouco mais de) um segundo.

$$\begin{aligned} \frac{m}{e} &= \frac{1}{c^2} \\ &= \frac{1}{(300.000.000 \text{ m/s}) (300.000.000 \text{ m/s})} \\ &= \frac{1 \text{ s}^2}{9000000000000000 \text{ m}^2} \quad (\text{dezesesseis zeros}) \\ &= 0,000000000000000011 \text{ s}^2/\text{m}^2 \quad (\text{dezesesseis zeros}). \end{aligned}$$

Multiplique-se numerador e denominador por um quilograma,

$$\begin{aligned} \frac{m}{e} &= 0,000000000000000011 \frac{\text{kg}}{\text{kg} (\text{m}^2/\text{s}^2)} \\ &= 0,000000000000000011 \text{ kg/joule} . \end{aligned}$$

A densidade de massa da energia é 0,000000000000000011 quilogramas por joule.

É o significado de  $e = mc^2$ , a *inércia da energia*.

É universal.

A energia se apresenta sob diferentes formas—nuclear, elétrica, cinética, química, etc.—mas cada joule tem sempre a massa de 0,000000000000000011 kg (dezesesseis zeros depois da vírgula, como já dito).

Um corpo de um quilograma movendo-se a 1,41 metros por segundo possui energia cinética de um joule.

$$\begin{aligned} \text{energia cinética} &= \frac{1}{2} m v^2 \\ &= \frac{1}{2} 1\text{kg} \cdot 1,41 \text{ m/s} \cdot 1,41 \text{ m/s} \\ &= 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ joule} . \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>De fato, a rigor, a velocidade é 299.792.458 m/s. Veja-se a seção **03/16** à página 9.

A energia cinética está no corpo.

É localizada, como qualquer forma de energia.

Então a massa é massa do corpo + massa da energia cinética

$$= 1 \text{ kg} + 0,000000000000000011 \text{ kg}$$

$$= 1,000000000000000011 \text{ kg} .$$

A massa de um corpo que se move é maior que a do corpo em repouso.

Porque ela inclui a massa da energia cinética.

É por isto que a massa aumenta com a velocidade.

E mais, ao tentar acelerar um corpo já em movimento é preciso acelerar não só o corpo, mas também sua energia cinética.

Torna-se cada vez mais difícil acelerar à medida que o corpo adquire mais velocidade.

Deduz-se a fórmula da massa em função da (massa de repouso e da) velocidade.

A energia cinética, e sua massa, aumentam sem limite a uma velocidade (cada vez mais próxima de uma velocidade) finita, de 300.000.000 m/s.

Por isso, não é possível mover um corpo a velocidade maior que 300.000.000 m/s; em princípio.

A velocidade de qualquer corpo é limitada porque a energia tem inércia. É uma limitação fundamental. A velocidade é limitada em princípio; não se trata de dificuldade tão somente prática ou técnica, mas uma manifestação da inércia universal da energia.

A idéia de corpo movendo-se a velocidade maior que 300.000.000 m/s é incoerente porque supõe que a energia teria massa menor do que efetivamente e universalmente apresenta, ou até mesmo, que teria massa nula.

## 02/16 Limitada.

A *quantidade de movimento*<sup>2</sup>, de um corpo em movimento, é massa  $m$  vezes velocidade  $v$ ,

$$mv .$$

Empurrar é transferir quantidade de movimento.

A taxa de transferência é a quantidade transferida por unidade de tempo,  $\frac{\text{delta}(mv)}{\text{delta } t}$ , chama-se *força* (delta é um pequeno intervalo).

Em velocidades muito menores que 299.792.458 m/s a massa varia muito pouco (porque a energia cinética tem massa muito pequena) e nesse caso

$$\frac{\text{delta}(mv)}{\text{delta } t} \sim m \frac{\text{delta } v}{\text{delta } t} = \text{massa} \cdot \text{aceleração} .$$

Um corpo parado tem quantidade de movimento nula. Em movimento tem quantidade de movimento  $mv$ .

Se o acelerarmos até uma velocidade maior  $V$ , a quantidade de movimento torna-se  $mV$  (a massa varia muito pouco; a velocidade é maior).

---

<sup>2</sup>Costuma-se denotá-la com a letra  $p$ .

Se o aceleramos até velocidade maior ainda, torna-se  $mV$ .

Mais ainda, torna-se  $m$ .

Pois bem, quando a velocidade é tão grande, maior ainda, comparável a 300.000.000/m/s, a energia cinética é tão grande que sua massa passa a ser comparável à do próprio corpo. E a quantidade de movimento é

$M$ ,

com massa um pouco aumentada.

Ao se empurrar o corpo, já nessa alta velocidade, a velocidade aumenta, e a massa também aumenta,

$MV$ .

E se continuamos a empurrar, a velocidade sempre aumenta, mas aumenta cada vez menos, porque a massa é cada vez maior; a massa aumenta,

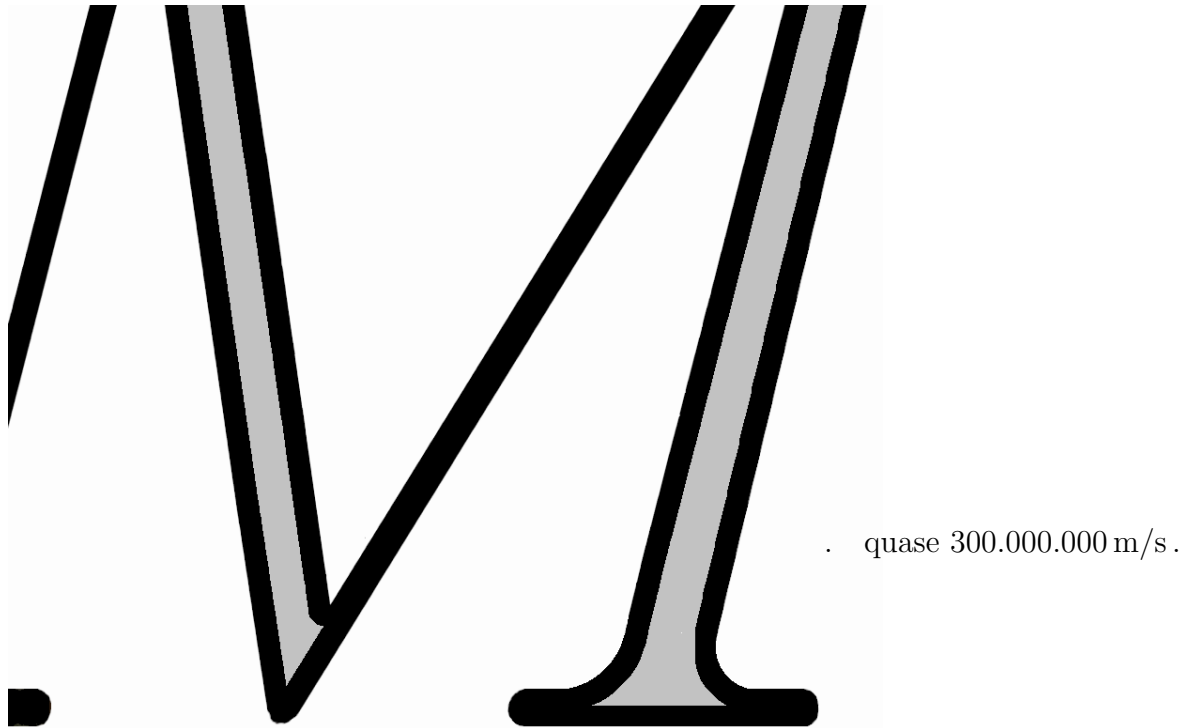
$MV$ .

A massa torna-se preponderantemente massa da energia cinética, até maior, ou muito maior, que a do próprio corpo.

Com a massa grande a aceleração é pequena.

E se ainda continuamos, e continuamos, a empurrar... a velocidade sempre aumenta, mas aumenta cada vez menos, sempre inferior a 300.000.000 m/s,





Ao empurrar, em baixas velocidades a velocidade aumenta e a massa aumenta muito pouco; em velocidades comparáveis a  $300.000.000 \text{ m/s}$  a massa aumenta e a velocidade aumenta muito pouco.

Por mais que se transfira quantidade de movimento a velocidade é limitada.

Acelerar um corpo em velocidades próximas a  $300.000 \text{ km/s}$  é empurrar mais material praticamente à mesma velocidade.

## 03/16 Exatamente.

Um lampejo de luz é um ente físico que se desloca à velocidade máxima, em princípio, da natureza.

Dizemos habitualmente que tal velocidade é  $300.000.000 \text{ m/s}$  mas trata-se de fato de um arredondamento tão somente para facilitar a linguagem.

A velocidade da luz é, exatamente,  $299.792.458 \text{ m/s}$ .

É uma constante da natureza. Universal.

Por que tem esse valor? Não se tem explicação. A natureza é assim.

O mesmo ocorre com outras constantes fundamentais, por exemplo, a constante da gravitação. Um quilograma atrai outro quilograma a um metro de distância com a força de  $0,0000000000667$  newtons (dez zeros após a vírgula). Para tal valor, não se tem explicação.

A velocidade da luz é tão fundamental que o metro passou a ser definido por intermédio dela—oficialmente.

Um metro é a distância que a luz percorre em  $1/299.792.458$  de segundo.

É por isto que o valor da velocidade da luz é exato.

## 04/16 $m(v)$ .

Vai aí a dedução da dependência da massa com a velocidade, a partir da inércia da energia.

Não importa se não se acompanha detalhes.

Ao acelerar, a variação da massa é a massa da energia cinética acrescentada,

$$dm = \frac{1}{c^2} de_{\text{cinética}}$$

( $d$  significa *diferencial*, ou *infinitésimo*, variação infinitesimal;  $c$  é a velocidade da luz;  $1/c^2$  é a densidade de massa da energia).

(Lembrando,  $1/c^2$  é 0,00000000000000011 quilogramas por joule, a massa pequenina da unidade de energia.)

A energia acrescentada é o trabalho realizado<sup>3</sup>, força vezes deslocamento,

$$dm = \frac{1}{c^2} \frac{d(mv)}{dt} ds \quad .$$

$\frac{ds}{dt}$  é a velocidade,

$$dm = \frac{1}{c^2} (dm v + m dv) v \quad .$$

Desenvolve-se o diferencial do produto,

$$= \frac{1}{c^2} (v^2 dm + m v dv)$$

$$(c^2 - v^2) dm = m v dv \quad .$$

Passa-se tudo que tem  $m$  para um lado da equação; tudo o que tem  $v$  para o outro. E integra-se os infinitésimos. Quando a velocidade varia de zero até  $v$  a massa varia desde a massa de repouso  $m_0$  até a massa  $m$  (à velocidade  $v$ ),

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = \int_{\text{zero}}^v \frac{v dv}{c^2 - v^2} \quad .$$

São integrações estabelecidas.

$$\left. (\ln m) \right|_{m_0}^m = -\frac{1}{2} \left[ \ln (c^2 - v^2) \right]_{\text{zero}}^v$$

$$\ln m - \ln m_0 = -\frac{1}{2} \left[ \ln (c^2 - v^2) - \ln c^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \ln c^2 - \ln (c^2 - v^2) \right]$$

---

<sup>3</sup> O conceito de *energia* tem origem na dedução da descrição do movimento de um corpo sujeito a uma força *dependente da posição*,  $\frac{d\vec{p}}{dt}(\vec{r})$ . Desde que é função da posição, multiplica-se pelo diferencial  $d\vec{r}$ ,

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot d\vec{r} = dm \vec{v} \cdot \vec{v} + m d\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 dm + m \vec{v} \cdot d\vec{v} \quad ,$$

e integra-se desde  $m_0$  até  $m$  e desde  $\vec{v}_0$  até  $\vec{v}$ . (Em tempo. Se se admite massa invariável a primeira integral é nula.) Assim sendo—e desde que a integração não dependa do caminho—pode-se atribuir a cada posição um valor, a *energia* (no caso, a *energia cinética*), com dimensão massa vezes velocidade ao quadrado, sendo que a diferença *energia cinética final menos energia cinética inicial* é a referida integral ao longo do caminho  $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{d\vec{p}}{dt}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ , a que damos o nome de *trabalho*.

A nota de rodapé 7 à página 24 volta a se referir a esta integral (soma de duas integrais).

$$\begin{aligned}\ln \frac{m}{m_0} &= \frac{1}{2} \ln \frac{c^2}{c^2 - v^2} \\ &= \ln \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}} \quad .\end{aligned}$$

Se os logaritmos são iguais os argumentos são iguais,

$$\begin{aligned}\frac{m}{m_0} &= \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\end{aligned}$$

$$\boxed{m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot m_0} \quad .$$

Com o corpo parado  $m = m_0$  .

Com velocidade quase igual à da luz o denominador é quase nulo e a massa é muito maior que a massa de repouso.

Cresce sem limite quando  $v$  se aproxima de  $c$ . Massa grande é sinônimo de dificuldade para acelerar.

## 05/16 Outra dedução, equivalente.

$$\begin{aligned}de &= \frac{dp}{dt} ds \\ c^2 dm &= dp v \\ c^2 \int_{m_0}^m m dm &= \int_{\text{zero}}^p p dp \\ c^2 \frac{1}{2} (m^2 - m_0^2) &= \frac{1}{2} m^2 v^2\end{aligned}$$

$$\boxed{m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot m_0} \quad .$$

## 06/16 Ideia da velocidade limite.

Tratávamos a respeito de existir neste mundo uma velocidade limite, trezentos mil quilômetros por segundo (ou trezentos milhões de metros por segundo), porque a energia tem inércia e a energia de um corpo em movimento aumenta de modo que em altas velocidades se torna cada vez mais difícil acelerar.

A Lua tem o tamanho do Brasil.

Ela está no céu a uma distância cem vezes o seu tamanho.

Por isso a Lua se nos mostra como uma moeda de um centímetro colocada a um metro de distância.

Dissemos que a Lua, do tamanho do Brasil, está longe cem vezes seu tamanho, para formar uma idéia da velocidade limite de um corpo. A distância é aproximadamente (ou melhor dizendo, é comparável a) trezentos mil quilômetros, de modo que a tal velocidade é, de uma maneira simplificada, *ir da Terra à Lua em um segundo*.

A Lua dista da Terra trezentos e oitenta e quatro mil quilômetros. A distância de um extremo a outro do Brasil é aproximadamente três mil e oitocentos quilômetros.

O presidente Nixon falou aos astronautas Neil Armstrong e Edwin Aldrin na Lua — *Vocês realizam um feito para toda a humanidade!*... e um segundo para o sinal chegar até lá... e mais um segundo para vir a resposta até aqui... (Os sinais de comunicação, e a luz, se propagam com a velocidade limite.)

Quando astronautas viajarem para mais longe a comunicação demorará mais tempo.

P.S.: Apenas para aproveitar a oportunidade, e apenas como curiosidade (já que o que segue não serve ao entendimento da velocidade limite) mencionemos que o Sol, ele também, está longe cem vezes o seu tamanho.

Por isso, ele também, aparece no céu como uma moeda de um centímetro a um metro de distância. (Tem o mesmo tamanho aparente da Lua.)

Mas ele está muito mais longe.

E ele é muito maior.

O Sol é tão grande que, imaginando fosse trazido aqui para perto, não caberia entre a Terra e a Lua. Ele é quase quatro vezes maior que nossa distância à Lua. O diâmetro do Sol é um milhão e trezentos mil quilômetros.

A luz demora mais de quatro segundos para percorrer um comprimento igual ao diâmetro do Sol.

## 07/16 Ladrilhos e moluscos.

O espaço encontra-se preenchido por um campo, a *métrica*, e ele pervaga o universo; está em toda parte. Não se trata de universo oco, puro vácuo, nada entre os corpos, mas de algo concreto.

É preciso conversar e refletir, até que se se dê conta da pertinência de tal conceito a partir dos fenômenos.

Uma conversa científica ilustra a natureza das coisas, particularmente em se tratando de coisa universal.

Tal conversa é maior que a explicação da inércia da energia, e exige mais atenção.

Junto à matéria a métrica é curva. A gravitação é descrita por equações que relacionam (localmente) a curvatura da métrica à densidade de matéria. São as *equações de Einstein*.

Cair é evoluir livremente numa região onde o conjunto dos acontecimentos é curvo<sup>4</sup>.

Um conjunto de acontecimentos—em lugares e instantes diversos—possui em cada lugar e instante uma métrica.

---

<sup>4</sup>Com a observação da nota de rodapé 5 à página 14.

Curvar a métrica é difícil, requer energia. É o trabalho que se realiza ao levantar um corpo.

Além das explicações que podem ser interessantes se feitas ao estilo de uma conversa (esta, que é interrompida ao se tornar enfadonha) há citações, frases, que se tornaram clássicas, por haverem se mostrado coerentes, consistentes com os fatos. São menções preciosas, que vale a pena conhecer.

O plano da órbita da Terra ao redor do Sol chama-se *eclíptica*. O Sol está na eclíptica.

Se se tentar recobrir a eclíptica com ladrilhos quadrados, é impossível *em princípio*.

Porque os ladrilhos colocados próximos ao Sol são mais curtos na direção do Sol—mantêm o mesmo comprimento na direção perpendicular ao Sol—e não se encaixam.

Bem... , se se levar a régua lá, localmente o ladrilho continua quadrado, mas a régua encurta, e volta ao comprimento, conforme é colocada na direção do Sol, ou na direção perpendicular (do mesmo modo os lados do ladrilho).

A eclíptica é um plano. Uma superfície que passa a distância muito grande do Sol também pode ser um plano, conforme critérios que estabelecem de maneira única (que a superfície é um plano; que no caso tem curvatura nula). Mas superfície vizinha ao Sol não tem critério para ser um plano. Em outras palavras, não existe (não há possibilidade de que) superfície próxima ao astro tenha curvatura nula. Se se traçam várias superfícies que sejam equidistantes ao longe, perto do Sol já não serão equidistantes. Cabem mais metros entre elas.

Uma grande esfera tem maior volume se se traz o Sol para dentro.

São manifestações da curvatura da métrica, junto aos corpos.

A situação é completamente análoga, ainda que não sendo a mesma, a se tentar recobrir uma depressão de terreno com ladrilhos quadrados. É tentar eleger um sistema cartesiano de coordenadas (coordenadas retas e ortogonais) numa superfície curva. É impossível.

Ainda, mais um fato fundamental acontece perto do Sol (ou da Terra, ou perto de qualquer corpo): relógios evoluem morosamente.

O problema da geometria analítica—geometria descrita por números— em superfícies curvas foi resolvido no século XIX, por homens inteligentes e muito dedicados. Trata-se de descrever numericamente caminhos nessas superfícies e calcular quantidades, por exemplo, a distância de um ponto a outro ao longo do caminho.

E chega-se a um aspecto fundamental; desde que não é possível eleger um sistema de coordenadas que torne os cálculos particularmente mais simples, então o processo de cálculo deve ser estabelecido *de modo independente da escolha do sistema de coordenadas*.

Este é o *Princípio da Relatividade*. Ele—o princípio da relatividade—já consta na *Mecânica Clássica*, que estabelece que as mesmas leis de força valem para todos os referenciais em movimento uniforme relativo. A *Mecânica Moderna* estabelece que também as leis do Eletromagnetismo, e todas as leis físicas, valem para referenciais em movimento uniforme relativo (*Relatividade Especial*); e mais ainda, valem para todos os referenciais, sejam acelerados ou não (*Princípio Geral da Relatividade*).

Em outras palavras, qualquer sistema de coordenadas—que possa ser atribuído ao espaço em questão (nem todos podem; por exemplo, um sistema cartesiano não é atribuível a uma região curva)—é (em princípio) igualmente bom para se calcular.

Tal é coerente com o fato de que os sistemas de coordenadas não existem. São escolhas, arbitrárias.

Os corpos existem. A métrica existe. As coordenadas são apenas convenções de atribuição de números aos lugares e instantes, com os quais se calcula. As coordenadas são necessárias, para que haja números, mas são arbitrárias. Estão nos pensamentos de quem calcula.

Fosse tudo chato, os metros iguais em todos os lugares, e todos os relógios com a mesma cadência, então se utilizaria sistema cartesiano. Mas não é; tanto que nem mesmo é possível estabelecer um sistema cartesiano nas regiões em que as réguas ficam curtas, e/ou relógios idênticos evoluem com cadências diversas.

Qualquer sistema de coordenadas possível é igualmente bom (colocadas a parte dificuldades algébricas de sistemas desnecessariamente rebuscados). Por isso se falou em *moluscos* de referência, ou seja, um sistema qualquer, curvo, em geral não ortogonal, e dependente do tempo.

Ao se escolher um sistema de coordenadas arbitrário haverá um conjunto de fatores—dependentes da posição e do tempo—a serem multiplicados pelas coordenadas para se ter os resultados das medidas efetuadas por réguas e relógios locais.

*Há algo mais entre o céu e a Terra do que sugere nossa vã filosofia.* . . (parafraseando Shakespeare).

Continuemos a tratar da métrica.

## 08/16 A lei da gravidade.

A *lei da gravidade* até o início do século passado era *Matéria atrai matéria na proporção de suas massas e na proporção inversa do quadrado da distância*.

Mas. . . ao trazer um corpo até perto da Terra, como fica o planeta sabendo que deve atrair?

Afinal de contas, se a atração depende da distância, o planeta necessita saber a distância para aplicar a força conforme a lei. . .

Essa lei não é de fato fundamental. Não é *a lei da gravidade*. O planeta não sabe; ele é inerte, e não há como saber.

Trata-se de conseqüência, ou um teorema, a partir de lei mais fundamental, mencionada a seguir.

Na verdade, o lugar para o qual o corpo é trazido é de algum modo diferente dos outros tal que ali a aceleração tem um valor determinado.

Bem. . . se é diferente, então ali existe alguma coisa. Não é *absolutamente nada*. Pois se nada fosse—nada mesmo—não teria propriedade para ser diferente.

O que existe em cada lugar é a *métrica*. Universal.

O lugar, e mais ainda, o lugar ao longo do tempo, onde um corpo é colocado próximo a um astro, é curvo. Ou em outras palavras, a métrica aí é curva. (Comprimentos de corpos—na direção do astro—são menores próximos ao astro, e relógios evoluem mais lentamente se colocados próximos do astro.)

E as trajetórias de corpos abandonados a evoluir livremente em região curva são em geral curvas e aceleradas (algumas são retas; mas aceleradas). Eventualmente a órbita intercepta o planeta, e ocorre colisão.

*Cair* é evoluir livremente numa região onde o conjunto dos acontecimentos é curvo<sup>5</sup>.

Em particular, a evolução mais lenta de relógios junto aos corpos contribui para que as trajetórias sejam aceleradas.

---

<sup>5</sup>E também, onde o conjunto não tem curvatura (chato) mas as coordenadas são escolhidas de modo que o movimento livre é acelerado. Tal aspecto será discutido na seção **11/16**, página 20.

O último exemplo que será apresentado (à página 24) trata de um raio de luz que passa próximo a um astro. Sendo ele (um conjunto de) frente(s) de onda, a parte da frente mais próxima ao astro evolui mais lentamente, e a direção de propagação muda em direção ao astro. A luz é atraída (queda da luz).

Um acontecimento elementar possui quatro coordenadas, três de posição e uma de tempo. O mundo possui três dimensões de posição (não existe explicação para este número três). Um conjunto contínuo de posições e instantes é um espaço de acontecimentos, com quatro coordenadas.

O conjunto de todos os acontecimentos é chamado *espaço-tempo*.

(Não confundir a curvatura do conjunto dos acontecimentos com a curvatura da superfície do planeta. Nada tem uma coisa a ver com a outra.)

Os matemáticos que elaboraram os cálculos geométricos em superfícies curvas definiram o conceito de *curvatura (em cada ponto)* para superfícies (com duas dimensões) e para espaços com número qualquer de dimensões. A curvatura possui direção (o espaço pode ser mais curvo numa direção que em outra) e ainda outras qualidades, e em geral varia com o tempo e de um lugar para outro.

Ela é definida a partir de características do próprio espaço. Uma formiga por exemplo, sobre o globo terrestre de uma sala de aula, sem consciência de que anda sobre superfície com curvatura, sai de Quito no Equador, caminha até o Gabão na África, vira noventa graus à esquerda, caminha até o polo, vira a segunda vez noventa graus à esquerda, e caminha, e chega de volta a Quito. Conclui que a superfície é curva.

(Fosse chata ela não teria voltado a Quito.)

E nós igualmente, a partir do conhecimento da diminuição dos comprimentos de réguas e da morosidade dos relógios à medida que são aproximados do planeta, calculamos a curvatura do conjunto dos acontecimentos em cada lugar em cada instante.

A matéria curva o conjunto, ou espaço, dos acontecimentos. Longe muito longe o espaço deles (quadridimensional) tem curvatura nula; é chato.

A evolução das coordenadas de posição de um corpo pode ser nula, qual seja, é o caso do corpo parado. Mas a evolução no tempo de qualquer corpo nunca é nula. (A propósito, admite-se apenas sistemas de coordenadas não-singulares; não se admite por exemplo escolha de coordenada de tempo com valor constante durante um período de evolução.)

A evolução de um corpo livre numa região chata é uma reta no conjunto dos acontecimentos (nunca é um ponto porque pelo menos a coordenada tempo muda). Mas em região curva não existe reta. A formiga sobre o globo (é um espaço de duas coordenadas de posição), por exemplo, ao caminhar sempre adiante realiza um círculo máximo, que é a linha que mais se aproxima da reta do espaço chato. Tais curvas são chamadas *geodésicas*. Por exemplo, o voo Buenos Aires - Sydney passa próximo ao Polo Sul. Tal caminho é mais curto que se se mantiver latitude constante. Uma geodésica é o caminho mais curto entre dois elementos do espaço.

A evolução de um corpo livre numa região curva é uma geodésica no espaço dos acontecimentos. Tal evolução eventualmente aproxima os corpos. Ou os mantém em órbitas elípticas, ou hiperbólicas.

A evolução geodésica é a mais natural conceitualmente, e é aquela observada. Por

exemplo, se numa região de acontecimentos curva a evolução fosse outra, no limite para a região chata o corpo livre não efetuaria movimento uniforme, ou então algum elemento particular existiria em região curva mas seria anulado em região chata. Tais hipóteses são bastante artificiais e não observadas. Repetindo; a evolução de um corpo livre numa região de qualquer curvatura é descrita por uma geodésica.

As órbitas independem da natureza de cada corpo. Todos os corpos evoluem conforme as mesmas geodésicas. Assim, todos os corpos caem com a mesma aceleração.

A atração universal é pois manifestação do encurtamento das réguas e atraso dos relógios próximos dos corpos. O encurtamento e o atraso são muito pequenos—matematicamente a curvatura é muito pequena—mas a manifestação é contundente. A aceleração em queda livre junto à Terra é dez metros por segundo em cada segundo. É aceleração muito grande. Ninguém—nem os animais—põe o pé fora de uma ribanceira; cai mesmo!

Menciono a característica matemática da descrição que reproduz nos cálculos um efeito tão contundente para uma curvatura tão pequena: na lei a coordenada de tempo aparece multiplicada por uma constante universal com dimensão de velocidade—tal que o produto tem a mesma dimensão de comprimento como as outras três coordenadas. A velocidade universal é 300.000.000 m/s, limite no universo. O tempo está assim, em todos os cálculos, multiplicado por uma constante muito grande. A curvatura junto ao planeta é pequena, mas em um segundo desloca-se 300.000.000 metros sobre tal superfície (no conjunto dos acontecimentos; não confundir com ‘superfície do planeta’), e aí começa-se a perceber. É mais fácil perceber a curvatura de uma superfície quando se anda bastante sobre a superfície curva.

A lei da gravidade é a relação entre a curvatura dos acontecimentos em cada lugar em cada instante com a matéria que ali existe.

Em outras palavras, ela expressa ultimamente quão curtas se tornam as réguas (na direção do astro) e quanto os relógios se atrasam quando aproximados da matéria.

O que enche o universo é algo que relaciona os comprimentos das réguas e as cadências dos relógios em diferentes lugares e instantes. É um ente físico concreto, chamado métrica. Nós apenas expressamos as relações entre os comprimentos e entre as cadências, mas isso é fundamental, porque as relações são definidas, verificáveis.





## 09/16 Campo.

- O universo é preenchido pela métrica, que relaciona os comprimentos das réguas e as cadências dos relógios em diferentes lugares e instantes. Nós expressamos matematicamente essas relações.

Para expressar é necessário eleger um sistema de coordenadas, que pode ser qualquer (atribuível ao conjunto em questão; um sistema cartesiano por exemplo não é atribuível a um conjunto curvo). Expressamos por intermédio de uma construção matemática da métrica—definida em cada lugar em cada instante (trata-se de expressar matematicamente um *campo*).

*Campo* é o ente físico definido em cada lugar em cada instante. A métrica é um campo que pervaga o universo, que relaciona os comprimentos das réguas e a cadência dos relógios em diferentes lugares e instantes e, em sua expressão matemática, com as coordenadas escolhidas.

Escolhidas as coordenadas, a métrica expressa os comprimentos das réguas (os tamanhos dos corpos portanto) e as cadências dos relógios naquele sistema de coordenadas.

Um campo é representado matematicamente por uma função da posição e do tempo. Com o campo métrica se calcula o campo curvatura (da métrica), a aceleração de queda livre em cada ponto, e outras grandezas.

A lei fundamental, universal da gravidade, relaciona curvatura da métrica e matéria; em cada ponto, ou seja, em cada lugar em cada instante.

Recordando, a queda é a evolução livre numa região onde a métrica é curva; ou, o conjunto das posições e instantes naquela região é curvo (com a observação da nota de rodapé 5, página 14).

Não se empurra a métrica, quer-se dizer, não se troca quantidade de movimento com ela. Não tem massa pois não é localizada; antes, está em toda parte do universo inteiro, e é responsável pelo fato de que o sistema de referência aqui inercial (aquele em que um corpo abandonado sem gravidade prossegue em movimento retilíneo uniforme) é o que vislumbra as galáxias distantes paradas. Na vigência da lei universal da gravitação, a métrica é contínua daqui até as galáxias, quase chata porque há pouca matéria.

Uma curvatura da métrica por outro lado é localizada, e encerra muita energia. Aumenta-se a curvatura integrada quando se afasta um pedaço de matéria de outro; ao levantar um corpo. É difícil levantar um corpo massivo. Pesado!

Se se quiser separar muita matéria, por exemplo afastar uma metade do planeta da outra, é tão difícil que se torna impossível praticamente. Contudo, é possível em princípio.

- Os corpos também são campos, sendo que seus componentes elementares são campos de alguns poucos tipos.

Só existem campos (entes extensos, dependentes da posição e do tempo, com propriedades características).

Todos os entes físicos são campos: as partes elementares dos corpos, e a métrica.

Não existe ente físico que não seja campo (por exemplo—imaginando—um ente material puntual, sem extensão, ou um ente que fosse um arcabouço rígido tal que movido

numa extremidade se movesse instantaneamente em toda a extensão...).

Desde que todos os entes são campos, todas as leis físicas fundamentais são leis sobre campos.

- Se a métrica for constante (em alguma região em alguma época) tem-se a impressão de que para descrever o mundo precisamos colocar réguas e relógios num espaço que existe.

Mas o mundo não é assim. A métrica em geral muda, ao longo do tempo e do espaço.

Em primeiro lugar, os enunciados sobre a natureza devem ser expressos de maneira independente da escolha do sistema de coordenadas, pois estas não existem na natureza; estão apenas em nossa descrição algébrica, que é invenção intelectual.

E, como dito, descrevemos os comprimentos e cadências por meio de uma grandeza—a métrica—com valor dado para cada conjunto de valores de coordenadas (em cada ponto do espaço-tempo).

Em segundo lugar, no caso de métrica dependente da posição e/ou do tempo não é em geral possível eleger um sistema de coordenadas a partir de arcabouços de réguas (ainda que imaginados) e/ou relógios locais.

Não se falou em espaço ou tempo independentes dos corpos. Falou-se de comprimentos, cadências, coordenadas de espaço atribuídas, coordenada de tempo atribuída.

Os corpos não 'estão no espaço', mas antes, são extensos. E sua extensão se continua com uma métrica que também é extensa, alterada por eles, e que preenche o universo.

Bem, em seguida apresento uma ponderação clássica que perdura já há muitos anos na vigência deste conhecimento sobre a gravitação (ao final do texto estarão as referências bibliográficas):

... o espaço-tempo não é necessariamente algo a que se pode atribuir uma existência separada, independentemente dos objetos reais da realidade física. Os objetos físicos não estão 'no espaço', mas estes objetos são *espacialmente extensos*. Desta maneira o conceito de 'espaço vazio' perde seu significado.

... Para ser capaz de descrever de algum modo *o que preenche o espaço* ... o *espaço-tempo* deve ser pensado como certamente existindo, pois de outro modo a descrição do *que preenche o espaço* não teria sentido.

... *espaço* como oposto ao *que preenche o espaço*... não tem existência separada. Se nós imaginamos... a *métrica* ser removida resta, não um espaço,... mas absolutamente *nada*... Não existe tal coisa como um 'espaço vazio', isto é, um espaço sem campo. O *espaço-tempo* não reivindica existência por si próprio, mas é apenas uma qualidade estrutural do campo.

... não existe 'espaço vazio de campo'.

Assim entendo, não há que se pensar em 'espaço preenchido' mas sim em *matéria* e *métrica*.

## 10/16 Paisagem.

- Já foi tratada a ideia de um campo—é a métrica—que pervaga o universo, e de que sua extensão, e assim como as extensões dos corpos, é uma propriedade dos entes físicos (quais sejam, a métrica e os corpos).

E mencionou-se que os corpos também são campos, sendo que seus componentes elementares são campos de alguns poucos tipos. Só existem campos (entes extensos, dependentes da posição e do tempo, com propriedades características).

Há por outro lado mais alguma coisa interessante mas é já puro assunto de Física, sem um conteúdo filosófico tão direto quanto aquele de apresentação de um ente físico que pervaga o universo. Deve ser uma conversa sobre fenômenos gravitacionais, que possivelmente virá ilustrar a necessidade do conceito de métrica, já apresentado.

- Do topo de um edifício apreciamos a paisagem. Um rapaz galga a amurada e se lança em queda.

Ele constata que seu referencial é *inercial*: corpos lançados prosseguem em movimento retilíneo uniforme. Não há gravidade.

Nós por outro lado sabemos que nosso referencial não é inercial. Corpos lançados descrevem curvas, e eventualmente colidem com o piso. Há gravidade. O peso, ou força gravitacional, acelera os corpos livres.

Ao olharmos o asfalto abaixo, ele não cai para dentro do chão, assim como o edifício e a cidade inteira, porque o terreno subjacente empurra de baixo para cima (no sentido da base para o topo do edifício) compensando o peso.

O rapaz vê o asfalto, assim como o edifício e a cidade inteira, acelerar no sentido da base para o topo do edifício a dez metros por segundo, a cada segundo, porque o terreno subjacente empurra. Temos, antropomorficamente, com um relógio na mão, a tendência de eleger o sistema de referência (referencial) com origem em nós mesmos, e esquadrihar o espaço com réguas colocadas uma após outra (até onde seja possível; se se avançar muito torna-se impossível). O rapaz faz assim para si do mesmo modo que fazemos nós no edifício.

Vejam um outro exemplo e depois voltaremos ao exemplo do rapaz em queda. Tomo de réguas e relógios e elejo meu referencial. Então um amigo toma das mesmas réguas e relógios, parte numa astronave e elege seu referencial com o mesmo procedimento. As coordenadas dele são diferentes das minhas. Um evento descrito num referencial—por exemplo, um pernilongo pousa em meu tornozelo, na origem em minhas coordenadas às nove horas e vinte e sete minutos—tem valores de coordenadas diferentes num outro referencial. Obtém-se algebricamente os valores num referencial a partir dos valores em outro referencial por intermédio de uma transformação de coordenadas.

Cada coordenada no novo referencial depende em geral de todas as coordenadas do referencial primitivo.

Os dois referenciais são igualmente adequados em princípio para a descrição da natureza. Podemos usar nossas coordenadas, ou as do amigo, indiferentemente.

Então, mudar de referencial é apenas transformar as coordenadas. São sinônimos; duas expressões para a mesma coisa.

Não é preciso voar na astronave para usar as coordenadas que o amigo atribuiu, eventualmente com um procedimento teatral igual ao nosso (enfileirar réguas; colocar

relógios nas extremidades das réguas).

Para usar um novo conjunto de coordenadas basta efetuar a transformação algébrica; não é preciso por exemplo lançar-se do edifício.

Mas cálculos com um conjunto de coordenadas ou outro resultam nos mesmos valores para as grandezas físicas, ou em valores diferentes porém consistentes com a mudança de coordenadas, descrevendo inequivocamente o(s) mesmo(s) fenômeno(s).

As leis da natureza devem ser expressas de modo independente da escolha das coordenadas, pois estas são apenas convenção para a descrição numérica dos fenômenos.

Mais do que poderem ser expressas de modo independente, elas *devem* ser expressas de modo independente—Princípio Geral da Relatividade—pois perto dos corpos o conjunto dos acontecimentos é curvo e não há em geral indicação (uma eventual motivação de simplicidade) para escolha privilegiada de coordenadas em preferência a outras<sup>6</sup>.

No topo do edifício nosso referencial não é inercial. Mas, descrevamos o mundo com outras coordenadas. Em geral a descrição é detalhada, qualquer. Mas por exemplo, com aquelas (atribuídas antropomorficamente) do rapaz em queda os corpos lançados prosseguem em movimento retilíneo uniforme; a descrição é simples.

O campo gravitacional de um planeta não pode ser globalmente anulado. É possível localmente, como foi feito junto ao edifício, mas em outras regiões aquela transformação não anula o campo; em particular por exemplo, aquelas coordenadas criadas pelo rapaz, se extendidas, iriam duplicar a gravidade no lado oposto do planeta. E em todo o universo faz aparecer um campo gravitacional constante.

Um astronauta, ao ligar o motor de seu foguete, se escolhe um sistema com origem em si próprio e coordenadas definidas por réguas e relógios, julga que o universo inteiro cai em direção e sentido paralelo ao sentido nariz-cauda do foguete, e que ele mesmo não cai porque o motor está ligado. Ao desligar o motor o campo desaparece; o universo eventualmente prossegue em movimento retilíneo uniforme.

E assim, estivemos exemplificando a frase notável, *Cria-se um campo gravitacional com uma mera mudança de coordenadas* (A. Einstein).

Adiante se tratará sobre queda.

## 11/16 Nula.

Procurar-se-á aqui ilustrar que um corpo livre é acelerado em direção à região onde os relógios evoluem mais lentamente. Nesta seção temos um exemplo, e na seção seguinte outro exemplo e um terceiro exemplo, de queda da luz.

Um corpo livre evolui conforme uma linha geodésica do espaço dos acontecimentos. Qualquer eventual tentativa de descrever o movimento de um corpo livre fora de geodésica seria rebuscada e artificial. Mas certamente o argumento fundamental é que os movimentos observados (queda) são de fato descritos pelas geodésicas.

O mundo pode ser representado numericamente (ou algebricamente) e geometricamente (ou pictoricamente). Na representação numérica elege-se um sistema de coordenadas, e calcula-se. Não há figuras. Na representação geométrica desenha-se o mundo; não

---

<sup>6</sup>As leis da natureza (por exemplo do Eletromagnetismo, ou da Gravitação) são enunciadas por intermédio de entes matemáticos—denominados *tensores*—cujas regras de transformação de um sistema de coordenadas a outro são definidas antes e independentes das próprias leis. Ademais, essas regras (de transformação) são locais, ou seja, dependentes em geral das próprias coordenadas.

há números. A representação numérica permite precisão ilimitada. A representação geométrica é ilustrativa, mas se se quiser expressar resultados com precisão demanda desenhos e ampliações enormes, e para isso é então impraticável.

Consideramos aqui a situação aludida na nota 5, página 14. Um astronauta, teimoso, mas perfeitamente razoável, descreve o mundo com um sistema de coordenadas atrelado a si próprio. A origem desse seu sistema é ele próprio.

À frente adiante do nariz de seu foguete está um corpo parado.

Em determinado momento o motor do foguete é ligado. Surge um campo gravitacional em todo o universo, que então cai. Os relógios na direção para a cauda do foguete passam a evoluir mais lentamente, tanto mais lentamente quanto mais distantes; os relógios na direção para o nariz do foguete passam a evoluir mais apressadamente, tanto mais quanto mais distantes. Ele astronauta não cai, porque o motor está ligado; permanece na origem. O corpo à frente cai, e atinge o foguete.

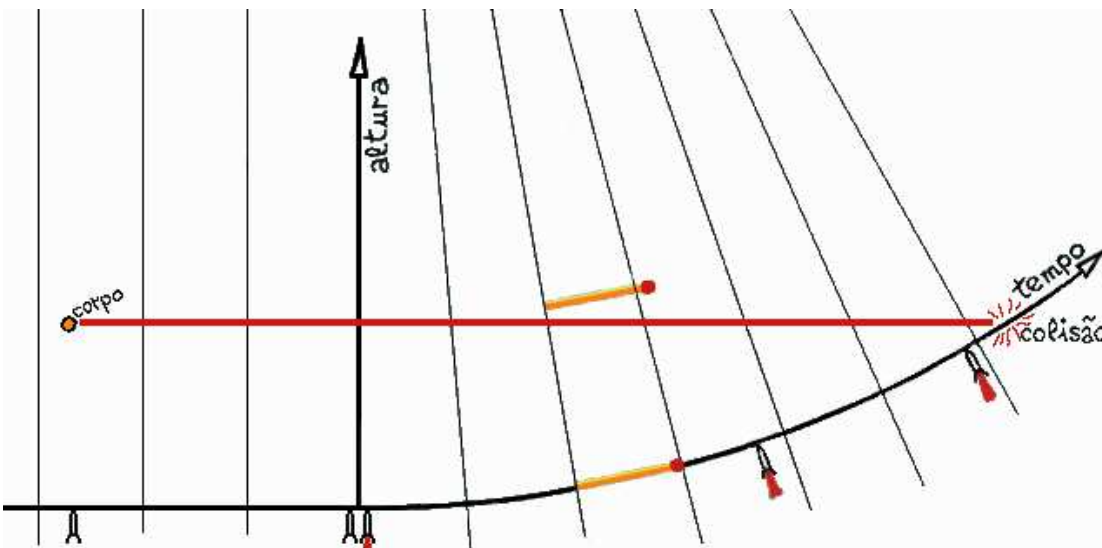
O gráfico horário, geométrico, representa o decorrer do tempo com uma coordenada de espaço sobre uma superfície. Um movimento unidimensional é assim representado por uma figura em duas dimensões, um eixo das posições e um eixo dos instantes de tempo.

(Neste exemplo o gráfico pode ser desenhado sobre a superfície de uma folha de papel por exemplo, mas porque o espaço-tempo neste caso é chato; tem curvatura nula. Como depois aparecerá—no exemplo seguinte—no caso não nulo o gráfico horário é desenhado sobre uma superfície curva.)

Quando tudo está parado (e longe de corpos) todos os comprimentos de réguas e as cadências são iguais; a curvatura (do conjunto dos acontecimentos) é nula. Quando se liga o foguete comprimentos e cadências tornam-se diferentes, mas a curvatura continua nula. Curvatura é intrínseca do espaço-tempo, independente das coordenadas. A expressão numérica da métrica (que descreve comprimentos e cadências) muda de um referencial (coordenadas) para outro—expressa por exemplo que relógios mudaram suas cadências—mas ao se calcular a curvatura com a nova expressão da métrica resulta zero como já era nula antes de se mudar de referencial.

Métrica chata é chata descrita por qualquer sistema de coordenadas.

Métrica curva tem curvatura não nula em qualquer sistema de coordenadas.



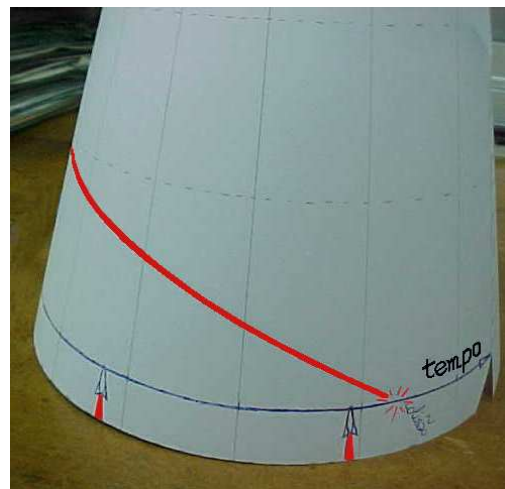
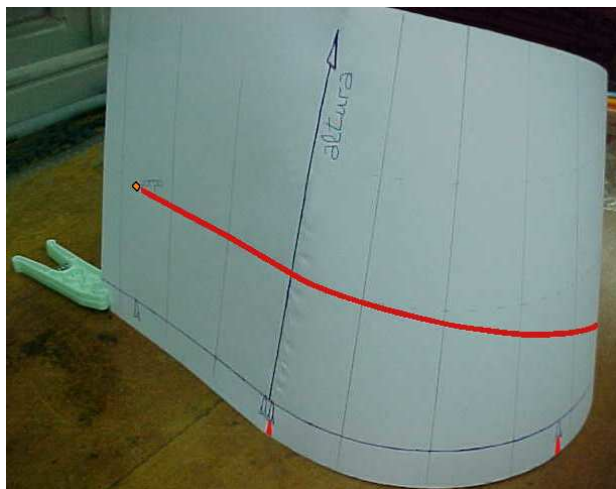
Uma folha de papel é chata. O gráfico de tal movimento unidimensional encontra-se desenhado sobre uma folha de papel porque o conjunto dos acontecimentos é chato. Depois, se se quiser, pode-se enrolar o papel, o que mantém a curvatura nula. A superfície de um cone tem curvatura nula. (É diferente de uma esfera, ou do para-lamas de um automóvel, formas que não podem ser reproduzidos com uma folha de papel.)

Num espaço chato as geodésicas são retas. A figura mostra corpo e foguete parados com suas geodésicas paralelas ao eixo do tempo. E o foguete é ligado. Para representar que os relógios acima do nariz passam então a evoluir mais rapidamente, o intervalo gráfico correspondente a uma unidade local (intervalo de um segundo local) é desenhado menor, como mostram os palitos iguais, que representam um segundo do astronauta. Fica deste modo representado que, à frente do foguete, quando se passa um segundo do astronauta, se passa lá mais de um segundo.

Então o quadriculado de representação torna-se encurvado (não confundir com a curvatura do espaço-tempo, nula). Por outro lado o corpo prossegue em sua geodésica reta. Esta eventualmente cruza o eixo do tempo encurvado (posição zero onde está o foguete) e corpo e foguete colidem.

(O foguete não prosseguiu na geodésica porque o motor foi ligado.)

Pode-se, se se quiser, ainda que desnecessário, enrolar o papel em forma de cone. É o que mostram as figuras.



## 12/16 Curvo.

Perto de um astro, e no interior dele, o conjunto dos acontecimentos, passados aos futuros, é curvo. Réguas e relógios têm comprimentos e cadências diferentes em lugares e momentos diferentes.

Um gráfico horário não deve necessariamente ser desenhado numa folha de papel—e no caso aqui não pode ser; no caso de queda noutro corpo o gráfico é desenhado sobre uma superfície curva, representando assim os diferentes comprimentos e cadências.

(Lembremos que o caso do campo gravitacional do exemplo anterior, criado em todo o universo, chato, não era de um corpo.)

Um gráfico horário representa instantes de tempo ao longo de um eixo de espaço. Desde

que o espaço tem apenas três dimensões somente um movimento bidimensional pode ter seu gráfico horário desenhado, e isto no caso de espaço-tempo chato. Pois quando é curvo, somente o movimento unidimensional por ter o gráfico desenhado, sobre uma superfície, e a terceira dimensão é utilizada para mostrar a curvatura da superfície.

- Um poço é construído no Brasil, até a China no outro lado da Terra. Abandonamos um corpo na entrada do poço (imaginemos que o planeta não gira). O corpo cai, passa em máxima velocidade pelo centro da Terra, e alcança a China onde para e retorna; continua indo e voltando desta maneira.

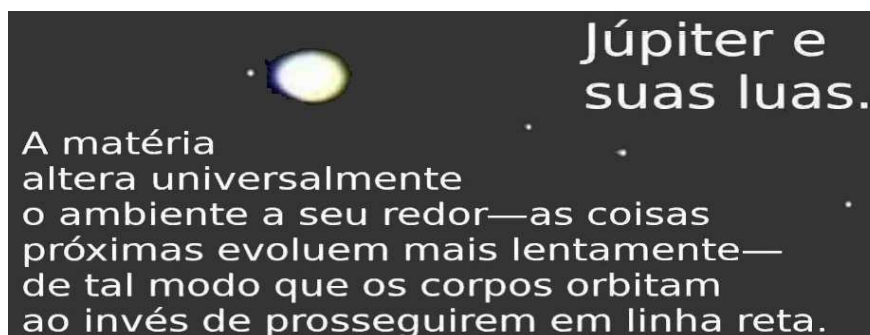
O gráfico horário—posição em função do tempo—de tal movimento unidimensional é desenhado sobre uma superfície curva.

A geodésica é obtida com uma fita plástica flexível, porém inflexível lateralmente. Ao partir, no Brasil, ela é paralela ao eixo do tempo (representando o abandono do corpo em repouso). Ela atinge eventualmente a altura nula do centro da Terra e continuará até a altura (negativa) da China; daí prossegue em oscilação.



(Tomei a liberdade de esboçar o próprio poço e uma parte do interior da Terra sobre a dimensão que representa o tempo.)

Não se deve colocar o pé fora de uma ribanceira quando os relógios abaixo evoluem mais lentamente. Pode parecer explicação demasiadamente elaborada para uma situação tão perigosa mas de fato os corpos caem porque os relógios abaixo evoluem mais lentamente.



• O seguinte e último exemplo tem a queda como consequência direta da lentidão dos relógios abaixo. Um lampejo de luz se propaga e irá passar próximo ao Sol. O lampejo é de fato uma frente de onda, com largura perpendicular à direção de propagação. Pois ao atingir os arredores do Sol o lado da frente mais próxima evolui mais lentamente. E a direção de propagação muda. O astro atrai a luz.

A velocidade da luz é 299.792.458 m/s em todos os lugares (localmente).

A relação entre a curvatura dos acontecimentos em cada lugar em cada instante (relação local) e a densidade de matéria naquele local ou nas proximidades é expressa pelas equações de Einstein.

## 13/16 Precessão de um satélite.

Em torno de uma estrela muito massiva e muito pequena evolui um satélite em órbita fortemente não circular. Com cálculos que desprezem a inércia da energia a órbita seria elíptica, com velocidade 300.000 km/s no periastro (ponto da órbita mais próximo da estrela).

De fato, ao cair, ele se aproxima da estrela com velocidade menor do que essa<sup>7</sup>. E permanece próximo por mais tempo (do que permaneceria se passasse a 300.000 km/s), o que coloca o periastro em posição avançada e mais baixa (em comparação com o periastro da elipse). A órbita torna-se uma quase-elipse com precessão no mesmo sentido (a menos de situações extremas de energia em que não haveria semelhança com elipse).

Não se trata de um planeta de mesma massa a velocidade elevada no periastro, mas de fato o sistema contém um planeta mais massivo a velocidade um pouco menor.

A energia é conservada.

Em trajetória quase-hiperbólica o desvio é maior que aquele da hipérbole obtida em cálculo sem inércia da energia.

O desvio da luz junto à estrela é o dobro do calculado sem inércia da energia (Mecânica Clássica), valor obtido no cálculo completo.

As observações de precessão e de desvio de imagem são verificações da teoria completa.

## 14/16 Transformações de Lorentz.

Voltamos nesta seção a considerar a velocidade limite do universo 299.792.458 m/s.

Pergunta. *Uma pessoa ao se mover com velocidade  $v$  em direção a um lampejo de luz que se aproxima seria atingida pelo lampejo à velocidade  $299.792.458 \text{ m/s} + v$  (superando assim a velocidade limite...)?*

Resposta. *Não.*

Os corpos que se movem são mais curtos, os relógios que se movem evoluem mais lentamente, e dois acontecimentos simultâneos para quem se move não são simultâneos para quem observa o amigo em movimento, de tal modo que, no caso, se recebemos o

<sup>7</sup>Nas duas integrais referidas à nota 3 página 10 sendo a velocidade muito próxima a  $c$  a segunda integral é praticamente nula e a transferência de energia é praticamente  $\Delta m \ c^2$ .



lampejo a 299.792.458 m/s, a pessoa que se aproxima do lampejo o recebe igualmente a 299.792.458 m/s.

Desde que de fato assim acontece, tratou-se de uma descoberta. Em 1905, por Albert Einstein.

Suponhamos que nos encontramos numa região distante dos astros e possuímos um conjunto de réguas todas iguais, e um conjunto de relógios todos iguais; com as réguas construímos um arcabouço cúbico e colocamos um relógio em cada ângulo do arcabouço, todos sincronizados por intermédio de sinais de luz. Estabelecemos assim três eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  ortogonais no espaço e permanecemos parados na origem.

Um amigo, possuidor dos mesmos relógios e réguas, se move na direção do eixo  $x$  com velocidade  $v$  e efetua os mesmos procedimentos de construção de um arcabouço, estabelecendo três eixos  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  e permanecendo em sua origem (que se move em relação a nós).

As relações entre coordenadas que o amigo com velocidade  $v$  com as mesmas réguas e relógios atribui—aqui denotadas com a linha superscrita ( $'$ )—e aquelas que nós atribuímos (numa região com curvatura de acontecimentos nula ou desprezível) são

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - v \cdot t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (t - \frac{v}{c^2} \cdot x) \end{array} \right.$$

onde os eixos  $x'$  e  $x$  estão na direção em que o amigo se move, e os eixos  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  são ortogonais;  $y'$  e  $y$  são paralelos e  $z'$  e  $z$  paralelos.

Estas são as *transformações de Lorentz*. Relacionam as coordenadas atribuídas com réguas e relógios idênticos em dois referenciais em movimento uniforme.

As transformações são tradicionalmente deduzidas a partir da imposição (algébrica) da mesma velocidade limite 299.792.458 m/s nos dois referenciais. Veja-se por exemplo A. Einstein. A invariância da velocidade limite constitui o *Segundo Princípio da Relatividade*.

Lembremo-nos que existem apenas campos, entre eles o campo eletromagnético, e o amigo em movimento verifica, por procedimentos objetivos de medição, as mesmas leis que nós verificamos—que no caso do campo eletromagnético são as *equações de Maxwell* (e verifica igualmente as leis dos demais campos).

Tais transformações de coordenadas mantêm a forma das leis da natureza quando escritas num ou noutro conjunto de coordenadas. Os campos mudam, mas as relações entre eles permanece.

A Teoria da Relatividade mantém em primeiro plano as leis da natureza (verificáveis experimentalmente, expressas de modo independente da escolha do sistema de coordenadas).

O conjunto das (quatro) equações de Maxwell constitui lei da natureza. A luz, como perturbação do campo eletromagnético, propaga-se à velocidade 299.792.458 m/s, o que

está contido nas equações de Maxwell. Num conjunto ou noutro de coordenadas a velocidade de propagação é a mesma.

- Obtenhamos a transformação de uma velocidade na direção  $x$  (ou  $x'$ ) de um para outro conjunto. Um corpo com velocidade  $v_x = \frac{dx}{dt}$  num referencial tem velocidade  $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$  no outro referencial.

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} \\ &= \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v}{c^2} dx} \\ &= \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \end{aligned}$$

$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}} \quad .$$

Se  $v_x = c$  então  $v'_x = c$ , independentemente de  $v$ .

A Teoria da Relatividade foi criticada como particularizante em face do desempenho central que atribui à velocidade da luz, mas na natureza a propagação do campo eletromagnético é o fenómeno que acontece com a maior velocidade possível de se transmitir um sinal. Não existe maneira mais rápida.

- O astronauta segura uma vara na direção  $x$  (ou  $x'$ ). Vemos o comprimento como  $\Delta x = x_2 - x_1$ —a diferença das coordenadas das extremidades da vara no instante  $t$ . O astronauta por sua vez vê o comprimento

$$\begin{aligned} \Delta x' &= x'_2 - x'_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x_2 - v \cdot t) - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x_1 - v \cdot t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta x \quad , \end{aligned}$$

que é o comprimento de repouso da vara (no caso repouso em relação ao astronauta). Vemos a vara mais curta,  $\Delta x < \Delta x'$ ; os corpos em movimento são mais curtos na direção do movimento<sup>8</sup>.

- Também, o astronauta segura um relógio; observamos o intervalo de tempo entre dois acontecimentos—por exemplo, início e fim de uma volta do ponteiro—como  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

---

<sup>8</sup>Consistentemente, o campo elétrico de uma carga em movimento retilíneo uniforme tem simetria de um elipsóide achatado na direção do movimento por um fator  $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . Tal campo é calculado no estrito âmbito do Eletromagnetismo, sem qualquer recurso à Teoria da Relatividade (sempre no âmbito do Eletromagnetismo, o cálculo utiliza um conceito conhecido como *Potencial de Liénard-Wiechert*).

O astronauta por sua vez vê o tempo

$$\begin{aligned}
 \Delta t' &= t'_2 - t'_1 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (t_2 - \frac{v}{c^2} x_2) - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (t_1 - \frac{v}{c^2} x_1) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} [t_2 - \frac{v}{c^2} v \cdot t_2 - (t_1 - \frac{v}{c^2} v \cdot t_1)] \\
 &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t ,
 \end{aligned}$$

que é o tempo próprio do astronauta. Vemos o relógio em movimento evoluir morosamente,  $\Delta t > \Delta t'$ .

A inércia da energia foi, historicamente, descoberta a partir das transformações de Lorentz, e nos dedicaremos pois a tal dedução<sup>9</sup>. A massa ( $m$ ) de um corpo em movimento inclui a massa de sua energia cinética, e é a massa do corpo em repouso  $m_0$  multiplicada por uma função  $f$  (crescente) da velocidade em módulo  $v$  (igual a 1 para  $v = 0$  m/s).

$$m(\text{velocidade}) = m_0 \cdot f(\text{velocidade}) .$$

Determinemos  $f(v)$  a partir da conservação da quantidade de movimento de um sistema isolado. Seja uma explosão elementar de dois corpos idênticos de massa de repouso  $m_0$  cada um, e cada um munido de uma mola. Os dois corpos encontram-se inicialmente juntos, parados, suas molas comprimidas e apoiadas uma contra a outra. O sistema é liberado, e os corpos se afastam cada um a velocidade  $v$  em módulo, e massa

$$m_0 \cdot f(v)$$

(a massa do corpo duplo parado antes da explosão é o dobro,  $2m_0 \cdot f(v)$ , com a energia em forma potencial nas molas retesadas).

Consideremos um segundo sistema de coordenadas no qual o corpo duplo movia-se inicialmente com velocidade  $-v$ , e no qual um dos corpos resultantes permanece em repouso após a explosão. Vale a conservação da quantidade de movimento ( $p'$ ).

$$p'_{\text{final}} = p'_{\text{inicial}}$$

$$m'_{\text{corpo 1}} v'_{\text{corpo 1}} + m'_{\text{corpo 2}} v'_{\text{corpo 2}} = m'_{\text{corpo duplo}} v'_{\text{inicial}}$$

$$m_0 \cdot f\left(\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}\right) \cdot \frac{(-2v)}{1 + \frac{v^2}{c^2}} + \text{zero} = 2m_0 \cdot f^2(v) \cdot (-v) ,$$

---

<sup>9</sup>A relação  $e = mc^2$  foi originalmente deduzida pela transformação da energia da radiação emitida por um corpo.

pois nesse sistema um dos corpos espalha com velocidade  $-2v/(1 + \frac{v^2}{c^2})$  e o outro resulta em repouso, bem como o corpo duplo original tem massa  $2m_0 \cdot f^2(v)$  e velocidade  $v$ .

(Pode-se observar, ainda preliminarmente, que, desde que o primeiro corpo resulta com velocidade em módulo menor que  $2v$  — o denominador  $1 + \frac{v^2}{c^2}$  é maior que 1 — sua massa é maior que a de repouso. Em outras palavras, tem-se aqui, já, evidência de que a massa aumenta com a velocidade.)

Simplificando o fator comum  $-2m_0 v$  tem-se

$$f\left(\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}\right) = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) f^2(v) \quad .$$

Para encontrarmos a função utilizaremos sua representação em série de potências. A função geral a ser tentada será

$$(1+x)^n = 1 + n.x + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} x^3 + \dots$$

que é crescente com  $x$  e igual a 1 para  $x = \text{zero}$ .

Escrevamos  $f(v)$  como

$$a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + a_4 v^4 + \dots$$

com  $a_0, a_1, a_2 \dots$  a serem determinados pelo igualamento dos coeficientes de cada potência nos dois membros da equação.

A função é par,  $f(-v) = f(v)$  (a massa cresce do mesmo modo independentemente do sentido da velocidade), e a série pois não contém parcelas de potências ímpares;  $a_1 = a_3 = \dots = 0$ .

$$\begin{aligned} a_0 + a_2 \cdot 4 v^2 \left(1 - 2 \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) + a_4 \cdot 16 v^4 (1 - \dots) &= a_0^2 + 2 a_0 a_2 v^2 + a_2^2 v^4 + \dots \\ &+ a_0^2 \frac{v^2}{c^2} + 2 a_0 a_2 \frac{v^4}{c^2} + \dots \\ &+ a_0 a_4 v^4 + \dots \end{aligned}$$

(onde utilizamos a série do quadrado de  $\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$ ,

$$\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^{-2} = 1 - 2 \frac{v^2}{c^2} + 3 \frac{v^4}{c^4} - \dots$$

e sua quarta potência, cuja série se inicia com 1).

- Igualando coeficientes da potência zero tem-se

$$a_0 = a_0^2 \longrightarrow a_0 = 1 \text{ (a possibilidade } a_0 = 0 \text{ encontra-se descartada).}$$

- Igualando coeficientes da potência dois tem-se

$$4 a_2 = s a_2 + \frac{1}{c^2} \longrightarrow a_2 = \frac{1}{2 c^2} .$$

- Igualando coeficientes da potência quatro tem-se

$$\begin{aligned} -\frac{8}{c^2} a_2 + 16 a_4 &= a_2^2 + \frac{2}{c^2} a_2 + 2 a_4 \\ -\frac{4}{c^4} + 16 a_4 &= \frac{1}{4 c^4} + \frac{1}{c^4} + 2 a_4 \longrightarrow a_4 = \frac{3}{8 c^4} . \end{aligned}$$

A solução é pois

$$\begin{aligned} f(v) &= 1 + \frac{1}{2 c^2} v^2 + \frac{3}{8 c^4} v^4 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} , \text{ ou seja,} \end{aligned}$$

$$\boxed{m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot m_0} .$$

A densidade de massa da energia é obtida pela dedução inversa àquela da seção 04/16 (à página 10).

$$\begin{aligned} \frac{de}{dm} &= \frac{\text{força} \cdot ds}{dm} \\ &= \frac{d(mv) ds}{dm dt} \\ &= \frac{m dv + dm v}{dm} v \\ &= mv \frac{dv}{dm} + v^2 . \end{aligned}$$

A derivada de  $v(m) = \frac{c}{m} \sqrt{m^2 - m_0^2}$  — inversa de  $m(v)$  — é  $\frac{c m_0^2}{m^2 \sqrt{m^2 - m_0^2}}$  ;

$$\frac{de}{dm} = \cancel{m} \frac{c}{\cancel{m}} \sqrt{m^2 - m_0^2} \frac{c m_0^2}{m^2 \sqrt{m^2 - m_0^2}} + \frac{c^2}{m^2} (m^2 - m_0^2)$$

$$de = c^2 dm .$$

Integrando,  $e - e_0 = mc^2 - m_0^2$  .

Desde que a energia é definida a menos de uma constante aditiva pode-se escolher  $e_0 = m_0 c^2$  e tem-se

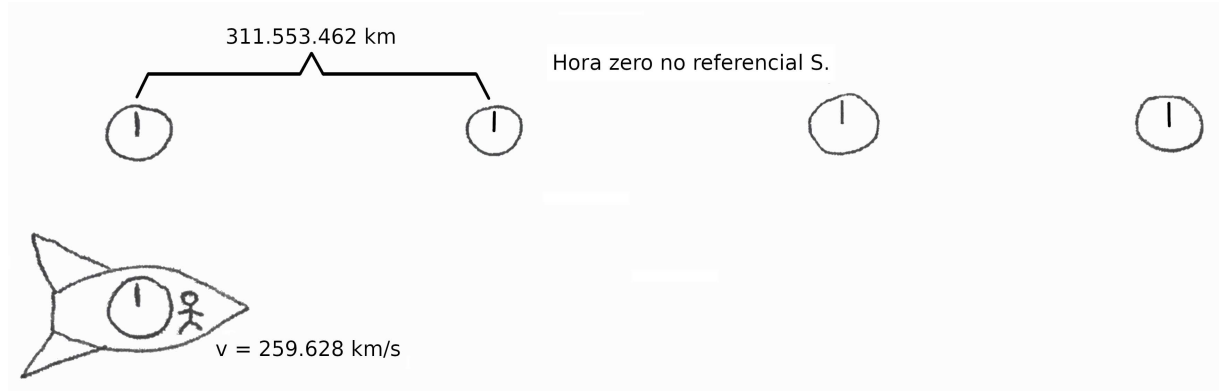
$$e = m c^2 .$$

Outra dedução, equivalente,

$$\frac{de}{dm} = \frac{dp}{dm} v = \frac{d(mv)}{dm} v = \frac{d\left(c \sqrt{m^2 - m_0^2}\right)}{dm} \cdot \frac{c}{m} \sqrt{m^2 - m_0^2} = c^2 .$$

## 15/16 Um exercício sobre transformações de Lorentz.

- Relógios sincronizados (por sinais de luz), parados no referencial  $S$  distantes entre si 311.553.462 km (é aproximadamente o diâmetro da órbita da Terra ao redor do Sol),



- uma nave espacial (referencial  $S'$ ) efetua movimento uniforme com velocidade

$$259.628 \text{ km/s} = \frac{\sqrt{3}}{2} 299.792.458 \text{ m/s} , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2 ,$$

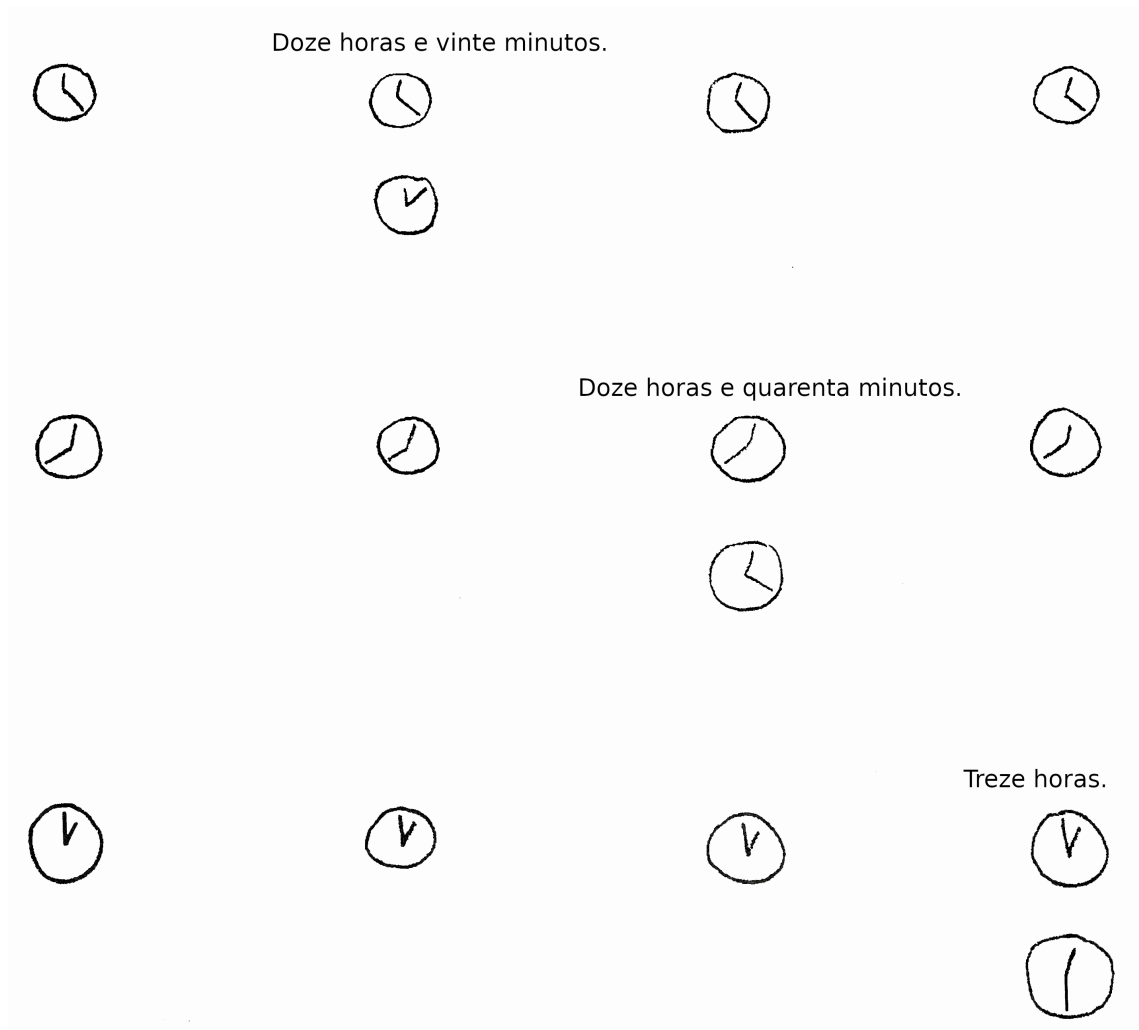
e ao passar pelo primeiro relógio a zero horas tem o seu relógio no interior da nave sincronizado com este primeiro relógio do referencial  $S$ .

No referencial  $S$  a nave demora 20 minutos para ir de um relógio a outro.

Ainda no referencial  $S$  o relógio do astronauta, bem como tudo o que acontece na nave, evolui mais lentamente. Um intervalo de tempo  $\Delta t'$  entre quaisquer dois eventos (por exemplo, passar pelo segundo relógio e passar pelo primeiro relógio) observado pelo astronauta desde  $S'$  é a metade do intervalo de tempo  $\Delta t$  em relação a  $S$ ,

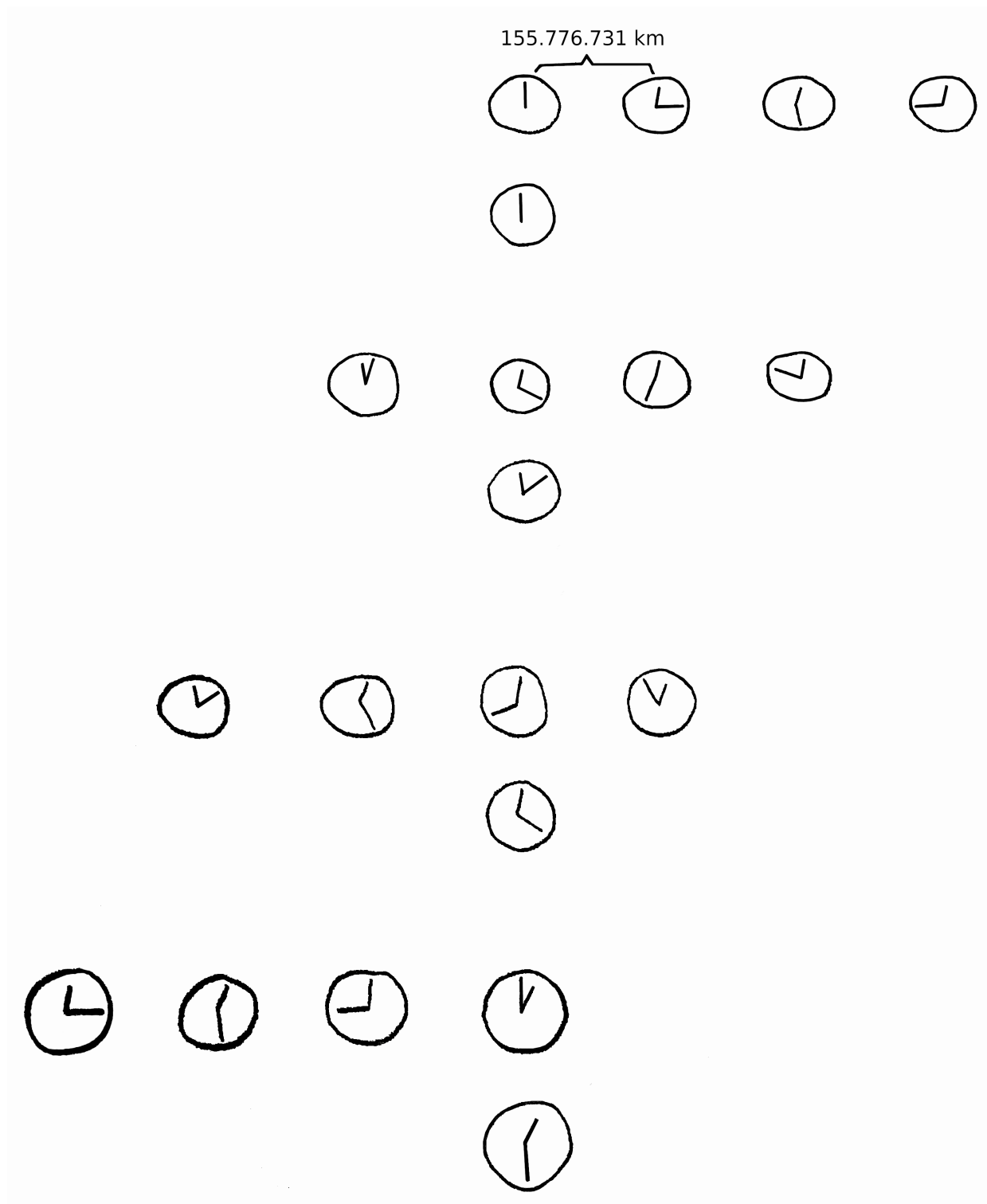
$$\Delta t' = \frac{1}{\gamma} \Delta t .$$

Visto por  $S$ , quando se passam 20 minutos nos relógios de  $S$  passam 10 minutos no relógio da nave. A figura mostra a descrição desde  $S$ .



Vistos desde  $S'$  são os relógios  $S$  que evoluem mais lentamente. Também, para o astronauta em  $S'$  os relógios de  $S$  não estão sincronizados. De fato, os relógios que vêm chegando, e que foram sincronizados por quem estava em  $S$ , estão adiantados.

E no referencial  $S'$ , de onde o astronauta vê os relógios de  $S$  passarem à mesma velocidade 259.628 km/s, em sentido contrário, medidos com as réguas e relógios em  $S'$  a distância entre os relógios é a metade, 155.776.731 km.



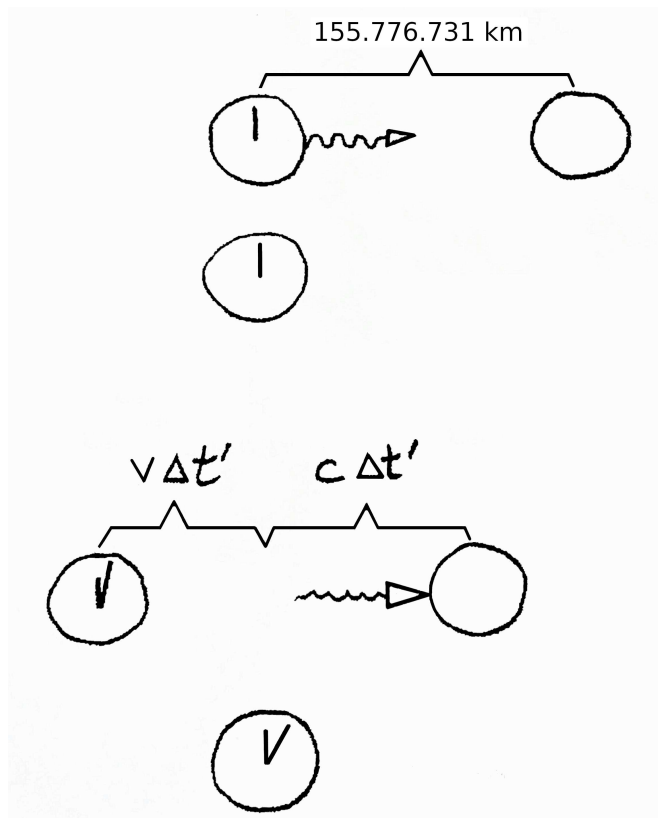


- No referencial  $S$ .

Para sincronizar, a pessoa que está junto ao primeiro relógio envia um sinal eletromagnético tal que—no momento em que é atingida—a pessoa no segundo relógio acerta para dezessete minutos e 19,23 segundos (1039,23 segundos é o tempo de percurso).

- No referencial  $S'$ .

Os relógios de  $S$ , e o sinal, movem-se em sentidos opostos.



No momento em que o segundo relógio é atingido o relógio do astronauta marca o tempo  $\Delta t'$ .

$$\begin{aligned}
 v \Delta t' + c \Delta t' &= 155.776.731 \text{ km} \\
 \frac{\sqrt{3}}{2} c \Delta t' + c \Delta t' &= \frac{1}{2} \left( 1200 \text{ segundos} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} c \right) \\
 \Delta t' &= \frac{600 \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} = 278,46 \text{ s} .
 \end{aligned}$$

Pergunta. Como, segundo  $S'$ , o segundo relógio resultou 15 minutos adiantado?

O adiantamento é o que foi colocado menos o que deveria ter sido colocado (para sincronização em  $S'$ ).

$$\text{adiantamento} = 1039,23 - \frac{1}{2} \Delta t' = 1039,23 - 139,23 = 900 \text{ s} = 15 \text{ minutos}.$$

Segundo o astronauta naquele momento deveriam ter posto 139,23 segundos; mas puseram 1039,23.

## 16/16 Manutenção das equações de Maxwell sob transformações de Lorentz.

É aqui apenas uma ilustração, com a projeção que tem transformação simples, de uma das equações vetoriais.

As equações de Maxwell são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\text{lei de Gauss}) \\ \nabla \cdot \vec{B} = \text{zero} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{lei de Faraday}) \\ \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{J} \quad (\text{lei de Ampère}) \end{array} \right.$$

O operador  $\nabla \times$  é o operador *rotacional*, e o operador  $\nabla \cdot$  é o *divergente*.

A quantidade  $\rho$  é a *densidade de carga*,  $\vec{J}$  é a *densidade de corrente*;  $\varepsilon$  é a *permissividade elétrica* e  $\mu$  a *permeabilidade magnética*.

No vácuo  $\rho = 0 \text{ C/m}^3$  e  $\vec{J} = \vec{0} \text{ A/m}^2$ . Por exemplo, as leis de Gauss e de Ampère em coordenadas cartesianas são

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad ; \\ \nabla \times \vec{B} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial ct} \\ \frac{\partial E_y}{\partial ct} \\ \frac{\partial E_z}{\partial ct} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Escrevamos as coordenadas em função das coordenadas de um novo sistema (em movimento uniforme; são as transformações de Lorentz).

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \gamma (x' + v \cdot t') \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma (ct' + \frac{v}{c} \cdot x') \end{array} \right.$$

Calculemos  $\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial ct'}$  (a primeira projeção, com respeito às novas variáveis) cuja transformação de um conjunto a outro de variáveis é particularmente simples.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial ct'} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial E_x}{\partial ct} \frac{\partial ct}{\partial ct'} + \frac{\partial E_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial ct'} \right) .$$

Substituindo as transformações de Lorentz bem como a lei de Gauss tem-se

$$= \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial E_x}{\partial ct} \gamma - \left( \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \gamma \frac{v}{c} \right] .$$

E substituindo a lei de Ampère,

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \gamma - \left( \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \gamma \frac{v}{c^2} \\ &= \gamma \frac{\partial(B_z - \frac{v}{c^2} E_y)}{\partial y} - \gamma \frac{\partial(B_y + \frac{v}{c^2} E_z)}{\partial z} \end{aligned}$$

e desde que  $y = y'$  e  $z = z'$  tem-se

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial ct'} = \gamma \frac{\partial(B_z - \frac{v}{c^2} E_y)}{\partial y'} - \gamma \frac{\partial(B_y + \frac{v}{c^2} E_z)}{\partial z'} ,$$

que é a (primeira projeção da) lei de Ampère no novo sistema. Os campos mudam mas as relações de Maxwell permanecem. A segunda ( $B_{y'}$ ) e terceira ( $B_{z'}$ ) projeções do campo magnético ( $\vec{B}'$ ) no novo sistema são respectivamente

$$\gamma(B_y + \frac{v}{c^2} E_z) \quad \text{e} \quad \gamma(B_z - \frac{v}{c^2} E_y) .$$

A primeira projeção do campo elétrico é a mesma que nas coordenadas originais,  $E_{x'} = E_x$ .

Pode-se construir relógio e régua puramente eletromagnéticos, com raios de luz e espelhos, os raios vão e voltam entre os espelhos. Tal relógio e régua ao se moverem diminuem a cadência e o tamanho na direção do movimento. A Relatividade é a aceitação de que relógios e régua construídos com quaisquer campos—por exemplo, estruturas que sustentem os espelhos do relógio e régua eletromagnéticos, ou qualquer relógio ou régua; qualquer material exceto o campo eletromagnético puro é constituído também por campo eletrônico e/ou campos nucleares—são morosos e encurtados ao se moverem.

Assim é entendido para qualquer campo, ainda que não conheçamos sua(s) lei(s)—e de fato não conhecemos, pelo menos até presentemente.

## Sobre o tempo.

O tempo é a cadência da evolução.

Há no universo aqueles sistemas inertes que ao evoluir retornam à mesma configuração, portanto repetem o comportamento, e o exemplo marcante é o satélite, o planeta. São relógios naturais. E há também os relógios inventados.

Além disso, os vários relógios possuem períodos em relação constante entre si, o que permite conceituar uma cadência universal—o tempo— independente de cada relógio em particular.

Neste modo de pensar tempo existe objetivamente independente da mente humana, em modo semelhante a se poder julgar que nosso universo existe objetivamente.

## Referências

A.Einstein, *Sobre a eletrodinâmica de corpos em movimento*, Annalen der Physik 17, 1905; republicado em *The Principle of Relativity*, Dover Publications, Inc., 180 Varick Street, New York, N.Y. 10014. SBN 486-60081-5.

A.Einstein, *A inércia de um corpo depende de seu conteúdo de energia?*, Annalen der Physik 17, 1905; republicado em *The Principle of Relativity*, Dover Publications, Inc., 180 Varick Street, New York, N.Y. 10014. SBN 486-60081-5.

A.Einstein, *Relativity the special and the general theory*, Crown Publishers, Inc., One Park Avenue, New York, N.Y. 10016. ISBN 0-517-025302 0-517-029618.

	$v(m) = \sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m^2}} c$	$p(m) = \sqrt{m^2 - m_0^2} c$	$e(m) = m c^2$
$m(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_0$		$p(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v$	$e(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} e_0$
$m(p) = \sqrt{\frac{p^2}{c^2} + m_0^2}$	$v(p) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{p^2}}} c$		$e(p) = \sqrt{p^2 c^2 + e_0^2}$
$m(e) = \frac{e}{c^2}$	$v(e) = \sqrt{1 - \frac{e_0^2}{e^2}} c$	$p(e) = \frac{\sqrt{e^2 - e_0^2}}{c}$	

Um corpo que se move possui quantidade de movimento e possui energia. Se se desconsidera a inércia da energia as relações entre essas grandezas são  $m = m_0$ ,  $p = m_0 v$ ,  $v = p/m_0$ ,  $e = \frac{1}{2} m_0 v^2$ ,  $v = \sqrt{2e/m_0}$ ,  $e = p^2/2m_0$  e  $p = \sqrt{2m_0 e}$ , onde energia é a cinética apenas. Desde que  $m = e/c^2$  as relações são as mostradas acima.

Todas as verificações de espaço ou de tempo são determinações de coincidências de espaço e de tempo. Se a realidade fosse apenas pontos materiais em movimento nada seria observado. Observa-se apenas os encontros de dois (ou mais) desses pontos materiais. Os resultados de nossas observações são verificações dos encontros de pontos de nossos órgãos de sentido ou de nossos instrumentos de medida com outros pontos, por exemplo, uma observação de coincidência entre um ponteiro de relógio, um ponto no mostrador e um evento junto ao relógio, todos no mesmo lugar no mesmo instante.

A adoção de um sistema de coordenadas tem a função de organizar a descrição das coincidências. Elas podem ser quaisquer (desde que sem ambiguidades). Coordenadas são escolhidas, elas são convencionadas.