Física I

Primeiro Semestre da Universidade

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

1.1 A Física

A natureza é constituída de inúmeros corpos, que estão dispostos em vários lugares distintos e que se movimentam continuamente de um lugar para outro. Aos acontecimentos da natureza damos o nome de *fenômenos*. Quando os acontecimentos ocorrem sem alterar a constituição dos corpos envolvidos diz-se, tradicionalmente, que são fenômenos físicos. Ciência é elaboração mental humana que organiza as experiências vividas e sua lógica. A *Física* é a ciência que tem como objeto os fenômenos físicos. O escoamento da água de um rio ou o aquecimento de um pedaço de ferro são, por exemplo, fenômenos físicos. Por outro lado, quando o ferro se enferruja aparece uma nova substância que não existia; tem-se no caso um fenômeno químico que, em primeira aproximação, não é objeto da Física.

No entanto, se analisamos os processos de transformação química de um ponto de vista microscópico mesmo tais transformações são entendidas à luz de teorias físicas. Na análise dos corpos microscópicos—partículas—os fenômenos envolvidos também são microscópicos. É nesse sentido que as reações químicas, bem como a radioatividade, são devidamente tratados como fenômenos físicos. E em especial o caso do fenômeno da radioatividade, em que um corpo emite radiação com notáveis propriedades, podendo mesmo em certos casos não apresentar alterações químicas, sempre foi tratado como fenômeno físico.

A Física é pois uma ciência da natureza. Tem por objeto as relações entre os fenômenos, excetuados os fenômenos próprios da natureza viva, objeto de outras ciências, a *Biologia* e a *Medicina*.

A fim de haver conexão entre a mente humana e os fatos naturais as previsões teóricas devem ser verificadas experimentalmente. Realizar um experimento é manipular corpos em circunstâncias determinadas, observando seu comportamento.

As Grandezas Físicas

As afirmações mais interessantes da Física relacionam quantidades. Essas quantidades são obtidas da natureza por intermédio do ato de medir. Medir é comparar duas quantidades da mesma espécie, uma das quais funciona como padrão. Do ato de medir resulta um número.

As grandezas são, do ponto de vista matemático, as quantidades que variam ou podem variar. Em Física uma grandeza é definida pelo processo utilizado para medila. As grandezas físicas são divididas em grandezas *fundamentais* e grandezas *derivadas*. Geralmente consideramos como fundamentais o *tempo*, o *comprimento* e a *massa*. Contudo outras grandezas também podem ser consideradas como fundamentais. As grandezas derivadas são aquelas definidas a partir das grandezas fundamentais por intermédio de operações algébricas. Exemplo, *velocidade*, que é comprimento dividido por tempo. O número de grandezas fundamentais é o número mínimo necessário para definir todas as grandezas físicas.

A *Mecânica* é o estudo dos movimentos dos corpos. As grandezas tempo, comprimento e massa são as grandezas fundamentais da Mecânica. Um intervalo de tempo é medido contando-se o número de ciclos de um relógio ocorridos simultaneamente com o período em questão. Um comprimento é medido verificando-se quantas unidades cabem no espaço em questão. E há outras duas grandezas fundamentais, que funcionam contudo como uma única grandeza para todos os efeitos práticos, a *massa inercial* e a *massa gravitacional*. Estas duas grandezas são distintas, com processos de medição distintos, mas apesar disso elas conduzem ao mesmo valor numérico (ou a valores proporcionais, ver página 66). Daí podermos falar da massa de um corpo sem especificar se se trata de massa inercial ou gravitacional. Oportunamente definiremos os dois processos de medição (ver páginas 49 e 64).

O sistema de unidades mais comumente adotado é o *Sistema mks*, no qual a unidade de comprimento é o *metro*, a unidade de massa é o *quilograma* e a unidade de tempo é o *segundo*. Outros sistemas também são utilizados principalmente o *Sistema cgs* que adota as unidades *centímetro*, *grama* e *segundo*.

Um segundo (s) é 1/86.400 de um dia solar médio. Esta é a definição baseada na rotação da Terra, denominada *tempo universal*. Há também uma definição baseada na translação da Terra, chamada *tempo das efemérides*, e uma definição baseada em microondas emitidas pelo elemento césio.

Um metro (m) é o comprimento do trajeto percorrido pela luz, no vácuo, durante um intervalo de tempo de 1/299.792.458 de segundo. Esta definição foi adotada na 17ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, realizada em 1983, tendo sido motivada entre outras razões pelo aperfeiçoamento de instrumentos de medida de comprimento de onda e da frequência de radiações luminosas.[1]

Um quilograma (kg) é a massa de um determinado cilindro, denominado *quilograma padrão*, que está guardado na Repartição Internacional, em Sèvres.

Utiliza-se frequentemente os seguintes múltiplos e submúltiplos das unidades,

$$\begin{aligned} \text{tera} &= 10^{12} & \qquad \text{mili} &= 10^{-3} \\ \text{giga} &= 10^{9} & \text{micro} &= 10^{-6} \\ \text{mega} &= 10^{6} & \text{nano} &= 10^{-9} \\ \text{quilo} &= 10^{3} & \text{pico} &= 10^{-12} \quad . \end{aligned}$$

[1]Anteriormente, desde a 1ª Conferência Geral, em 1889, o metro foi definido como sendo o comprimento de uma determinada barra, denominada *metro padrão*, que está guardada na *Repartição Internacional de Pesos e Medidas* , em Sèvres, na França. Na 11ª Conferência Geral, em 1960, o metro foi definido como sendo 1.660.763,73 comprimentos de onda de uma determinada linha espectral de luz (cuja notação é $2_{p_{10}} - 2_{d_5}$) emitida pelo criptônio 86. A atual definição, de 1983, é pois a segunda redefinição do metro.

Suas abreviações são respectivamente T, G, M, k, m, μ, n, e p. O mícron, que é a milionésima parte do metro, é abreviado como μ ou μm.

As unidades físicas possuem abreviações escritas em minúsculo, com exceção de nomes derivados de pessoas (por exemplo N, Hz, J, respectivamente abreviações das unidades newton, hertz e joule). Quando escritas por extenso as unidades são escritas em minúsculo (com exceção do grau Celsius, com maiúscula).

1.2 Teoria dos Desvios

Para cada grandeza física que se deseja medir torna-se conveniente dispor num aparelho uma sequência de unidades dessa grandeza, ou de outra que varia com ela (por exemplo a deflexão de um ponteiro). É o instrumento de medida, que possui uma escala de unidades disponível para uma comparação fácil.

O processo de medida de uma grandeza está sujeito a inúmeras perturbações, que podem ser classificadas em dois tipos fundamentais, *sistemáticas* e *acidentais*. As perturbações sistemáticas são aquelas identificáveis e corrigíveis, ao menos em princípio, se se conhece suficientemente o processo físico no qual a grandeza está envolvida. Por outro lado, as perturbações acidentais são o resultado da contribuição de inúmeras flutuações, abundantes na maioria dos ambientes. Essas flutuações são imprevisíveis, e são detectáveis com instrumentos suficientemente sensíveis. Devido às perturbações acidentais a repetição da medida de uma quantidade física conduz a valores diferentes, desviados em maior ou menor grau com relação a um valor médio.

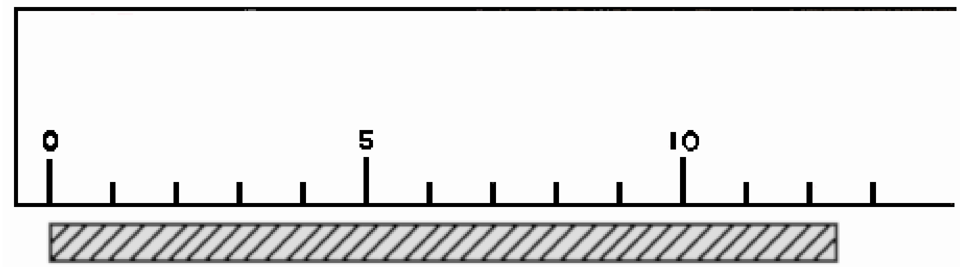
Precisão de uma Medida

Para conceituarmos a precisão de uma medida vejamos inicialmente o conceito de *precisão de um conjunto de medidas*. A precisão de um conjunto de medidas é o grau de reunião ou ajuntamento dos valores dessas medidas. Ela é avaliada por intermédio do *desvio absoluto médio* (que será definido à página 6).[2]

A precisão de uma única medida feita com um instrumento em condições normais de funcionamento é avaliada do mesmo modo, ou seja, pelo desvio absoluto médio que se obterá se se realizar um conjunto de medidas nessas mesmas condições. Assim, cada instrumento de medida possui uma precisão intrínseca. Nos instrumentos bem projetados a divisão da escala é feita de maneira compatível com a precisão do aparelho, não se dividindo além do necessário. Nesse caso, o desvio absoluto médio a que uma medição está sujeita é aproximadamente a metade da menor divisão.

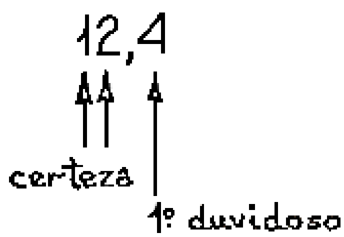
A *resolução* de uma escala é o menor valor que nela pode ser lido com certeza. Assim, por exemplo, a resolução de uma régua graduada em centímetros é um centímetro, e a resolução do mostrador de um cronômetro graduado em segundos é um segundo. Consideremos um exemplo simples de uma régua graduada em centímetros e meçamos o comprimento de uma haste.

[2]Observação. Existe ainda a *confiabilidade do valor médio* de um conjunto de medidas, avaliado por intermédio do *desvio da média* (ver página 7). Essa confiabilidade aumenta (ou seja, o desvio da média diminui) com o aumento do número de medidas.



Com certeza podemos afirmar que a medida é 12 cm. Mas note-se, uma casa decimal à direita da última de que se tem certeza (algarismo 2 no nosso caso) pode ainda ser avaliada, embora não com certeza, mas com alguma confiabilidade. Assim, então, é razoável escrevermos, 12,4 cm. Este algarismo 4 deve ser incluído na expressão da medida porque, embora não se tenha certeza sobre ele, dispõe-se de algum critério para avaliá-lo; no caso observamos a extremidade da haste entre os traços 12 e 13 cm da régua. Tal algarismo é chamado *primeiro duvidoso*. .

Por outro lado não devemos incluir qualquer outro algarismo à direita deste—são os completamente duvidosos—porque não dispomos de critério para avaliá-los com este instrumento de medida. Temos



Então, uma medida deve ser expressa com um algarismos a mais à direita do que indica a resolução do instrumento utilizado. Assim, a expressão de uma medida já nos indica a sua precisão. E, para uniformizar nossa notação, a própria resolução da escala do instrumento deve ser expressa com o primeiro algarismo duvidoso, por exemplo, a resolução desta régua é 1,0 cm.

Ainda, pode-se expressar uma medida em qualquer unidade da grandeza, independentemente da resolução do instrumento. Assim, a resolução da régua considerada e a medida da haste são corretamente expressas em qualquer das seguintes maneiras,

Resolução	Medida
1,0 cm,	12,4 cm,
10 mm,	124 mm,
0,010 m,	0,124 m,
$1{,}0 \,.\, 10^{-2}$ m,	$12{,}4 \,.\, 10^{-2}$ m .

No caso da unidade ser menor do que um décimo da resolução do instrumento usa-se necessariamente potências de 10; exemplo,

$$1{,}0 \,.\, 10^4\,\mu, \qquad\qquad 12{,}4 \,.\, 10^4\,\mu\,.$$

(Teria sido por exemplo errado escrever "124 000 μ" pois tal estaria a indicar uma resolução de 0,0010 cm, o que não é verdadeiro para o instrumento utilizado.)

Precisão do Resultado de uma Operação

Quando realizamos uma operação com números de precisão limitada obtemos um resultado que também possui precisão limitada. Para deduzir essa precisão (a partir das precisões dos operandos) empregamos o *método dos x*, que consiste em indicar os algarismos completamente duvidosos com a letra 'x' e efetuar a operação normalmente, deduzindo a cada passo o caráter duvidoso das operações com os algarismos duvidosos. Exemplos.

$$
\begin{array}{rr}
 & 2,3xx \\
+ & 6,49x \\
\hline
 & 8,8xx
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & 7,1xx \\
- & 2,49x \\
\hline
 & 4,6xx
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
 & 6,5x \\
\times & 2,5x \\
\hline
 & xxx \\
 & 3\ 25x \\
 & 13\ 0x \\
\hline
 & 16,3xxx
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
12,90xxx & 3,1351x \\
\cline{2-2}
\underline{12\ 5404\,x} & 4,117\,x \\
\quad 36xxx\,x & \\
\quad \underline{31351\,x} & \\
\quad\ 5xxx\,x\,x & \\
\quad\ \underline{3\,135\,1\,x} & \\
\quad\ 2\,xxxx\,x\,x & \\
\quad\ \underline{2\ 1945\ 7\,x} & \\
\quad\ \ xxxx\,x\,x &
\end{array}
$$

Um conjunto de x à direita do número representa algum conjunto de algarismos entre -(5000...) e +(5000...). Por exemplo, o número 2,37x representa algum número maior que 2,365000... e menor que 2,375000..., sendo o algarismo 7 duvidoso.

Por este raciocínio verifica-se que valores têm sua eventual grande precisão inútil quando operados com outros de menor precisão. Assim, é frequente abandonar-se um ou mais algarismos à direita. Durante esse processo, se o primeiro algarismo abandonado for maior ou igual a 5 deve-se somar uma unidade ao último algarismo retido, com o objetivo de minimizar os desvios (*arredondamento*). Faz exceção a esta regra o abandono de um único algarismo 5, ou de algarismos 50, ou 500, etc.; nesses casos arredonda-se o último algarismo para o valor par mais próximo. Exemplos,

$$
\begin{array}{rcl}
7{,}28 & \longrightarrow & 7{,}3 \\
7{,}24 & \longrightarrow & 7{,}2 \\
7{,}25 & \longrightarrow & 7{,}2 \\
7{,}35 & \longrightarrow & 7{,}4 \\
7{,}250 & \longrightarrow & 7{,}2 \\
7{,}251 & \longrightarrow & 7{,}3\ .
\end{array}
$$

Seguindo os raciocínios contidos no método dos x pode-se concluir as seguintes regras práticas,

> *Na adição e na subtração a precisão do resultado é a precisão da parcela menos precisa.*

E para a multiplicação e divisão introduz-se o conceito de *algarismo significativo*; são significativos todos os algarismos de que se tem certeza mais o primeiro duvidoso, zero à direita é significativo, zero à esquerda não é; por exemplo no número 16,0 os algarismos 1, 6 e 0 são significativos.

> *Na multiplicação e na divisão o número de algarismos do resultado é o número de algarismos significativos do fator mais pobre.*[3]

Com tais regras executamos os cálculos com uma máquina de calcular e consideramos apenas o número adequado de algarismos.

Repetição de uma Mesma Medida *(Desvio Médio de um Conjunto de Medidas)*

A medida de grandezas físicas é frequentemente realizada em condições em que existem perturbações acontecendo ao acaso, constituídas por inúmeras flutuações pequenas e aleatórias. Tais flutuações são abundantes na maioria dos ambientes e podem ser detectadas se o instrumento for suficientemente sensível, ou seja, possuir suficiente precisão intrínsica. Esses desvios acidentais, embora nunca previsíveis individualmente, podem ser tratados por métodos estatísticos, aplicáveis a conjuntos de medidas repetidas da mesma grandeza, obtendo-se valores médios mais confiáveis.

A repetição de uma mesma medição é oportuna quando o processo de medição não utiliza completamente a precisão intrínsica do instrumento.

Denotaremos o resultado de cada medição de um conjunto de medições por Y_i, entendendo que a quantidade Y é constituída de um número e de uma unidade física. O valor mais provável de uma grandeza medida N vezes nas mesmas condições é o *valor médio* $\overline{Y}$ do conjunto,

$$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i \ .$$

Cada medida possui um *desvio* ($\triangle_i Y$) com relação à média,

$$\triangle_i Y = Y_i - \overline{Y} \ .$$

Devido à própria definição, a soma dos desvios é nula (e por conseguinte também o desvio médio),

$$\sum_{i=1}^{N} \triangle_i Y = \sum_{i=1}^{N}(Y_i - \overline{Y}) = N\overline{Y} - N\overline{Y} = 0 \ .$$

Para expressar a flutuação das medidas em torno da média usa-se o *desvio absoluto médio* ($\overline{d_a}$ ou $\overline{|\triangle_i Y|}$), que é a média dos valores absolutos dos desvios,

$$\overline{d_a} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |\triangle_i Y| \ .$$

[3]Com exceção de que na multiplicação se o produto dos dois primeiros algarismos (dos dois fatores) for maior ou igual a 10 o número de significativos do resultado será o número de significativos do fator mais pobre mais 1.

O *desvio relativo médio* (d_r) é a relação

$$d_r = \frac{\overline{d_a}}{|\overline{Y}|} \ .$$

O desvio absoluto médio é um parâmetro que expressa a precisão de um conjunto de medidas. Ele tende a ficar constante se aumentamos o número de medidas e consequentemente indica a precisão do próprio método utilizado para medir. Existe contudo outro parâmetro, o *desvio da média* (d_m), que é o desvio absoluto médio de várias médias tomadas em vários conjuntos de medições. Essas médias estarão muito mais agrupadas (menor desvio absoluto médio) que os valores individuais das medidas de quaisquer dos conjuntos. A teoria estatística mais desenvolvida[4], e com verificação experimental, mostra que

$$d_m = \frac{\overline{d_a}}{\sqrt{N}} \ .$$

O desvio da média diminui se aumentarmos o número de medidas, indicando que o o valor obtido para a média se torna mais confiável.

A teoria estatística deduz que a probabilidade de que o desvio absoluto médio obtido em um dos conjuntos seja menor do que d_m é 58%. A notação completa do resultado de um conjunto de medidas deve mostrar tanto o valor médio como o desvio da média,

$$\overline{Y} \pm d_m \ ,$$

ou seja, estamos afirmando que o valor médio que se obtém para a grandeza com aquele número de medições tem 58% de probabilidade de ser maior que $\overline{Y} - d_m$ e menor que $\overline{Y} + d_m$. Façamos notar que esta não é a única convenção utilizada entre os autores para a notação, sendo necessária a verificação da convenção utilizada, principalmente quando se estiver comparando valores ou realizando operações com os resultados de medições.

Nesta notação deve-se escrever $\overline{Y}$ e d_m com a mesma precisão. Por outro lado a teoria indica que são necessárias vinte medidas ou mais para se ter um d_m com dois algarismos significativos e mais de cem para se ter três. Em vista disso, sugere-se que d_m seja escrito com um ou no máximo dois algarismos significativos. Por exemplo, a altura de um edifício é dada como (53,2±0,7)m, que é escrita desta maneira mesmo se foi medida com uma trena graduada em milímetros. O resultado numérico de d_m teria sido por exemplo 0,738m mas, se foram realizadas menos de vinte medidas, os algarismos 3 e 8 não serão significativos.

Quando se faz uma única medida da grandeza, que é situação que ocorre frequentemente, o valor médio passa a ser o próprio valor obtido e o desvio da média passa a ser o desvio absoluto médio característico do instrumento. Neste caso a notação se torna

$$Y \pm \overline{d_a} \ .$$

A diminuição de d_m com o aumento do número de medidas permite, no caso em que a precisão do conjunto de medidas está limitada por fatores externos ao instrumento de medida, aumentar a precisão do valor médio. Contudo, o número de medidas não deve

[4]Para aprofundar o assunto veja-se por exemplo H.F.Meiners, W.Eppenstein and R.H.Moore, *Laboratory Physics* New York, John Willey & Sons 1972.

ser aumentado indefinidamente sendo que seu limite é atingido quando a precisão do valor médio se torna da mesma ordem que o desvio médio absoluto intrínsico ao instrumento utilizado. A partir daí qualquer esforço que busque aumentar a precisão será inútil.

Problema 1

A profundidade de um rio foi medida quatro vezes obtendo-se os valores 10,10 m; 10,18 m; 10,37 m e 10,47 m. Como deve ser escrito o resultado dessas medidas?

Solução,

$$l = \bar{l} \pm d_m$$

onde $\bar{l}$ é o valor médio e d_m é o desvio da média.

$$\bar{l} = \frac{10{,}10+10{,}18+10{,}37+10{,}47}{4} = 10,28\,\mathrm{m} \qquad .$$

$$d_m = \frac{\overline{d_a}}{\sqrt{N}}$$

$$\overline{d_a} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |\triangle\, l_i|$$

$$\begin{aligned}
\triangle l_1 &= l_1 - \bar{l} = -\ 0{,}18\,\mathrm{m}\\
\triangle l_2 &= l_2 - \bar{l} = -\ 0{,}10\,\mathrm{m}\\
\triangle l_3 &= l_3 - \bar{l} = +0{,}17\,\mathrm{m}\\
\triangle l_4 &= l_4 - \bar{l} = +0{,}27\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

$$\overline{d_a} = \frac{1}{4}(0,26 + 0,18 + 0,17 + 0,27) = 0,22\,\mathrm{m}$$

$$d_m = \frac{0,22}{\sqrt{4}} = 0{,}1\,\mathrm{m}$$

Note-se para d_m que admitiu-se apenas um algarismo significativo (número pequeno de medidas). O comprimento será então escrito

$$(10,3 \pm 0,1)\,\mathrm{m}\,.$$

Desvio do Resultado de uma Operação

A média do resultado de uma operação aritmética realizada com conjuntos de valores é o resultado da operação realizada com as médias desses conjuntos.

Ademais, numa operação aritmética, se $f(x_1, x_2, \ldots)$ é o resultado e $x_1, x_2, \ldots$ são os operandos, quando pequenas variações $\triangle x_1, \triangle x_2, \ldots$ são causadas nos operandos a variação $\triangle f(x_1, x_2, \ldots)$ do resultado será

$$\frac{\delta f}{\delta x_1} \triangle\, x_1 + \frac{\delta f}{\delta x_2} \triangle\, x_2 + \ldots\ ,$$

onde $\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \ldots$ são derivadas parciais[5]

Desta relação pode-se deduzir as seguintes regras,

> *Na adição e subtração o desvio absoluto do resultado é a soma dos desvios absolutos das parcelas.*
>
> *Na multiplicação e divisão o desvio relativo do resultado é a soma dos desvios relativos dos fatores.*

Regras análogas valem para o desvio da média.

Problema 2

Os valores de duas grandezas são $A \pm \overline{d_A}$ e $B \pm \overline{d_B}$ respectivamente, onde $\overline{d_A}$ e $\overline{d_B}$ são desvios absolutos médios e as grandezas são diferentes de zero. Quais serão os resultados da soma, subtração, multiplicação e divisão dessas duas grandezas?

Na soma soma-se os desvios absolutos,

$$(A \pm \overline{d_A}) + (B \pm \overline{d_B}) = (A + B) \pm (\overline{d_A} + \overline{d_B}) \ .$$

Na subtração soma-se também os desvios absolutos,

$$(A \pm \overline{d_A}) - (B \pm \overline{d_B}) = (A - B) \pm (\overline{d_A} + \overline{d_B}) \ .$$

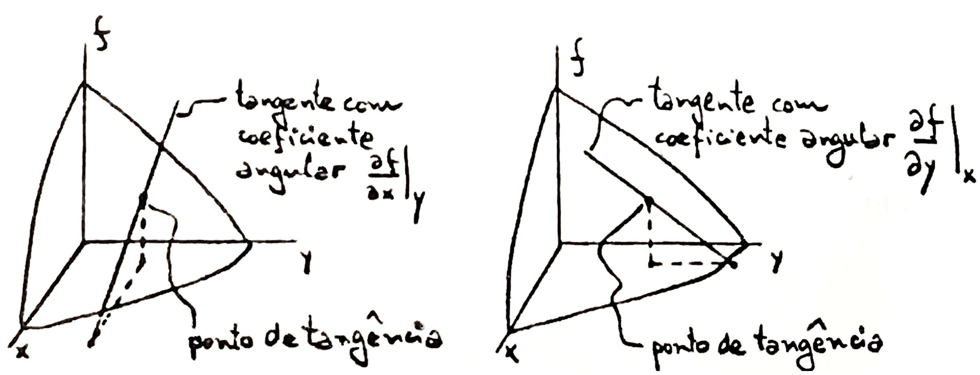
[5]Nota. Uma função de duas ou mais variáveis pode ser alterada pela mudança de uma ou mais variáveis. Seja por exemplo a função $f(x, y)$ de duas variáveis. Define-se *derivada parcial de f em relação a x com y constante* (denota-se $\left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_y$; o símbolo δ pode ser chamado de *parcial*) como sendo a fração

$$\frac{f(x + \triangle x, y) - f(x, y)}{\triangle x}$$

quando $\triangle x$ tende a zero (veja-se conceituação de derivada à página 21). Do mesmo modo a *derivada parcial de f em relação a y com x constante* $\left(\left.\frac{\delta f}{\delta y}\right|_x\right)$ é

$$\lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x, y + \triangle y) - f(x, y)}{\triangle y} \ .$$

Se representarmos $f(x, y)$ em um gráfico tridimensional—como exemplifica a figura seguinte—as derivadas $\left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_y$ e $\left.\frac{\delta f}{\delta y}\right|_x$ em um ponto são os coeficientes angulares das tangentes à superfície naquele



ponto, contidas respectivamente nos planos y constante e x constante.

Na multiplicação soma-se os desvios relativos. E para achar o desvio absoluto multiplica-se pela média do produto,

$$\begin{aligned}(A \pm \overline{d_A}).(B \pm \overline{d_B}) &= (A.B) \pm \left[\left(\frac{\overline{d_A}}{|\overline{A}|} + \frac{\overline{d_B}}{|\overline{B}|}\right).|A.B|\right] \\ &= (A.B) \pm \ (\overline{d_A}.|B| + \overline{d_B}.|A|\,)\ .\end{aligned}$$

Analogamente na divisão tem-se

$$\begin{aligned}\frac{A \pm \overline{d_A}}{B \pm \overline{d_B}} &= \frac{A}{B} \pm \left[(\frac{\overline{d_A}}{|\overline{A}|} + \frac{\overline{d_B}}{|\overline{B}|}).\left|\frac{A}{B}\right|\right] \\ &= \frac{A}{B} \pm \left(\frac{\overline{d_A}.|B| + \overline{d_B}.|A|}{B^2}\right)\ .\end{aligned}$$

1.3 Vetores

Os vetores são grandezas que possuem um valor absoluto e uma direção orientada. Exemplos são os deslocamentos no espaço, as forças, etc.. Uma grandeza deste tipo pode ser representada graficamente por uma flecha de comprimento proporcional a seu valor absoluto e com a direção e o sentido da grandeza.

Para especificar um intervalo de tempo, ou a massa de um corpo, basta uma única medida. Trata-se de uma *grandeza escalar*. Um *escalar* é um número, que pode ser puro ou seguido de uma unidade[6]. Por outro lado, para especificar uma posição no espaço são necessárias três medidas de comprimento, ao longo de três direções distintas. Trata-se de uma *grandeza vetorial*. Um vetor é definido matematicamente a partir das propriedades algébricas que ele deve possuir, e que serão apresentadas em seguida.

Denotaremos um vetor com uma letra que possui uma pequena flecha desenhada sobre ela, por exemplo, $\vec{r}$, $\vec{A}$, etc..

Espaço Vetorial

É um conjunto de elementos, chamados *vetores*, para os quais estão definidas,

1. Uma operação de soma
$$\vec{a} + \vec{b}$$
cujo resultado é um elemento do conjunto, operação esta que é comutativa, ou seja,
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$
e é associativa,
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}\,;$$
existe nesse conjunto um elemento nulo ($\vec{0}$) tal que
$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

[6]O escalar possui ainda a característica de manter-se invariável sob mudanças de referencial.

e todo elemento possui um simétrico, que é o elemento que somado a si resulta o vetor nulo; o simétrico é usualmente denotado com um sinal negativo,

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0} \, .$$

2. Uma multiplicação por um número,

$$m \, . \, \vec{a} \ \ ,$$

cujo resultado é um elemento do conjunto, tal que

$$(m.m') \, \vec{a} = m \, (m' \, \vec{a}) \ ,$$

onde m e m' são números—estes números são escalares—e

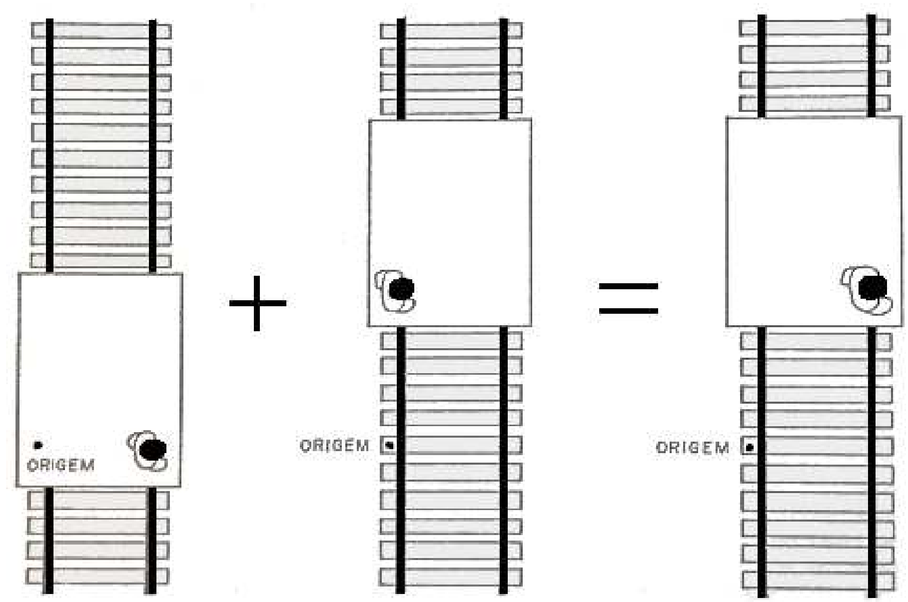
3. estas duas operações, soma e multiplicação por um escalar, possuem as seguintes propriedades distributivas,

$$\begin{aligned} m \, (\vec{a} + \vec{b}) &= m \, \vec{a} + m \, \vec{b} \\ (m + m') \, \vec{a} &= m \, \vec{a} + m' \, \vec{a} \ , \end{aligned}$$

sendo todas as igualdades válidas para quaisquer $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, m e m'. O conjunto de operações definidas para um espaço vetorial constitui a *álgebra vetorial*.

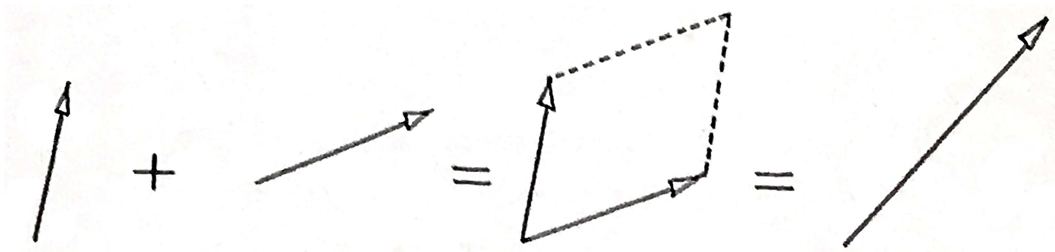
São exemplos de espaço vetorial,

- O espaço físico, desde que se convencione uma origem. A soma de posições é definida tendo por base deslocamentos sucessivos, o primeiro deles a partir da origem. A figura a seguir ilustra esse processo. Trata-se de um homem sobre um vagão. A



posição em que fica o homem quando apenas ele se desloca a partir da origem somada com a posição em que fica o homem quando apenas o vagão se desloca tem como resultado a posição em que fica o homem quando os dois se deslocam. Ademais, o elemento nulo é a própria origem e a multiplicação por um número m significa considerar a posição que está na mesma direção com relação à origem, porém m vezes mais distante (se m for negativo significa considerar o sentido contrário). Estas operações assim definidas obedecem a todas as propriedades de um espaço vetorial.

- O conjunto de flechas de todas as direções e de todos os comprimentos. A soma de flechas é feita pela *regra do paralelogramo*, desenha-se as duas flechas a serem somadas com as extremidades traseiras coincidentes (ou alternativamente com as extremidades dianteiras coincidentes), completa-se o paralelogramo e considera-se a diagonal que tem a extremidade coincidente, conforme a figura.

  A flecha nula é um ponto. Multiplicar por um número é considerar uma flecha de mesma direção e comprimento multiplicado pelo número.

- O conjunto de todas as triplas. Uma tripla é um conjunto de três números. Podemos denotá-la por intermédio de parenteses e vírgulas, assim por exemplo,

  $$(a_1, a_2, a_3)\ , \text{ ou mesmo } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\ .$$

  Uma n-pla (leia-se *ênupla*) é um conjunto de n números. Com $n = 2$ tem-se uma dupla. O número n é o número de dimensões da n-pla, ou do espaço vetorial. Cada número de uma n-pla é chamado *projeção*. A soma de n-plas é feita pela regra *Cada projeção do vetor soma é a soma das projeções correspondentes dos vetores parcelas.*

  $$(a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)\ .$$

  O elemento nulo é a n-pla que tem todas as projeções nulas. Multiplicar uma n-pla por um número é multiplicar todas as suas projeções por esse número,

  $$m\,(a_1, a_2, \ldots) = (m\,a_1, m\,a_2, \ldots)\ .$$

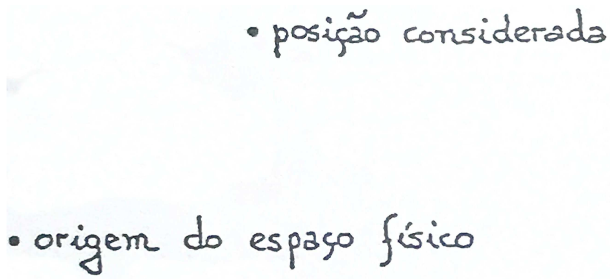
- O conjunto dos números reais. Este é o espaço vetorial mais simples. Possui apenas uma dimensão e para seus elementos estão definidas as operações de soma, subtração e multiplicação elementares da aritmética.

Representações

Uma *representação* é uma correspondência biunívoca entre dois espaços vetoriais.[7] Pode--se representar as posições do espaço físico por flechas ou por triplas. A representação

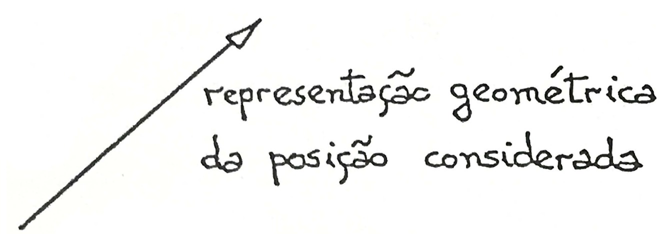
[7]Uma correspondência biunívoca é aquela que para cada elemento de um conjunto faz corresponder um e apenas um elemento do outro conjunto e vice-versa.

por flechas é feita apenas com as figuras das flechas, não se usando números. Podemos chamá-la representação *geométrica*, ou *pictórica*. Para obter a flecha correspondente a uma posição física

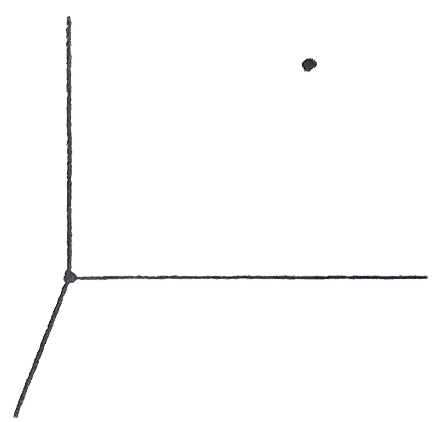


desenhamos uma flecha no próprio espaço físico da origem à posição considerada

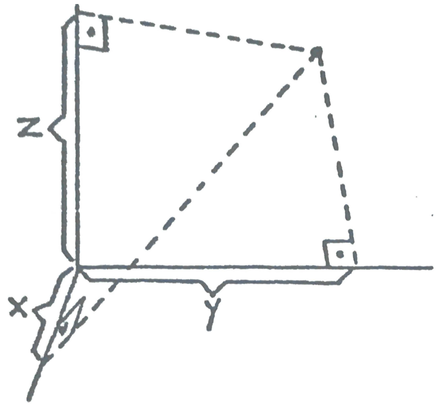
e em seguida consideramos apenas a flecha (ou múltiplo ou submúltiplo dela).



A representação por triplas, por sua vez, é feita apenas com números, não usando figuras. Chamemo-la representação *algébrica*, *numérica* ou *por projeções*. Para obter a tripla correspondente a uma posição escolhemos um sistema de três eixos (que geralmente são ortogonais, embora não obrigatoriamente),



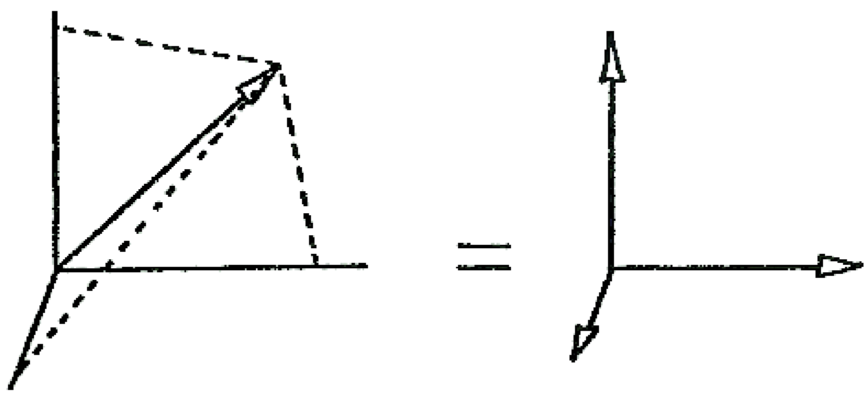
projetamos a posição considerada sobre os eixos



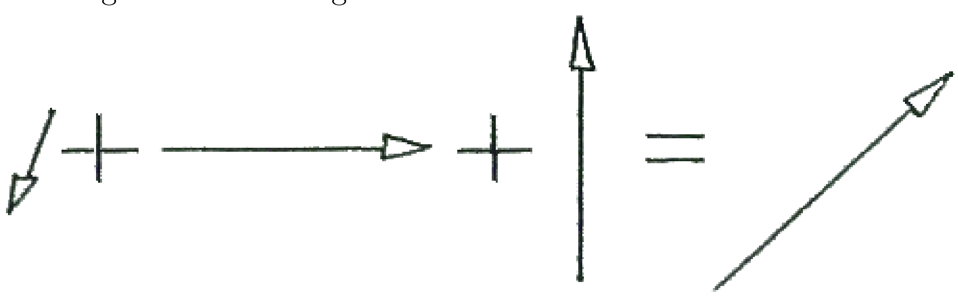
e consideramos os três comprimentos determinados, (x, y, z).

O sistema de coordenadas—eixos com suas unidades—é chamado *referencial*.

Um espaço de flechas e um espaço de n-plas, ambos com a mesma dimensão, também são representação um do outro. Quando projetamos uma flecha sobre um sistema de eixos obtemos flechas *componentes*,



que somadas são iguais à flecha original.



Os comprimentos orientados (com sinal) destes componentes são as projeções que constituem a n-pla correspondente àquela flecha. Esta representação de flechas por n-plas sugere a notação

$$x.\hat{x} + y.\hat{y} + z.\hat{z}$$

para vetores (no caso, triplas), onde x, y e z são as projeções e

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (1, 0, 0) \\ \hat{y} &= (0, 1, 0) \\ \hat{z} &= (0, 0, 1)\ , \end{aligned}$$

ou seja, $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ são vetores unitários nas direções dos eixos. Estes, recebem o nome de *versores.*

Módulo

O *módulo* de um vetor é o seu valor absoluto; é um número associado ao vetor que nos dá informação de sua magnitude, independentemente de sua direção. As definições de módulo nos vários espaços vetoriais devem respeitar a correspondência que existe entre eles. O módulo de uma flecha é seu comprimento. O módulo de uma posição física é sua distância à origem. O módulo de uma n-pla $(a, b, \ldots)$ é

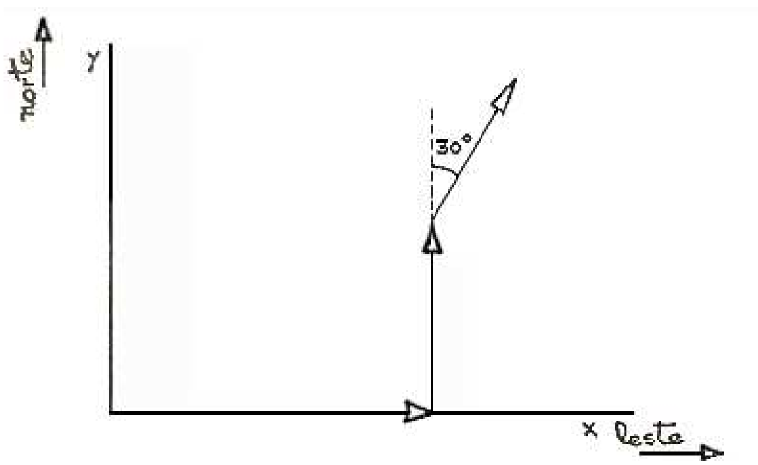
$$\sqrt{a^2 + b^2 + \ldots} \quad .$$

Estas definições são naturais para os espaços apresentados, desde que as flechas foram desenhadas no próprio espaço físico e $\sqrt{a^2 + b^2 + \ldots}$ é o comprimento da diagonal conforme o Teorema de Pitágoras (para n dimensões).

Denotaremos o módulo de um vetor $\vec{a}$ por a ou $|\vec{a}|$.

Problema 3

Um automóvel percorre 50 km na direção oeste-leste, para o leste. Depois percorre 30 km na direção sul-norte, para o norte; percorre em seguida 25km numa direção que faz um ângulo de 30° com a direção sul-norte, no sentido que se aproxima do nordeste. Determine a distância retilínea entre a posição final do automóvel e o ponto de partida.



$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

$$\begin{aligned} r_x &= 50\cos 0° + 30\cos 90° + 25\cos 60° \\ &= 50 + 25\,\tfrac{1}{2} \\ &= 62,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_y &= 50\,\mathrm{sen} 0° + 30\,\mathrm{sen} 90° + 25\,\mathrm{sen} 60° \\ &= \text{zero} + 25\,\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 51,65 \end{aligned}$$

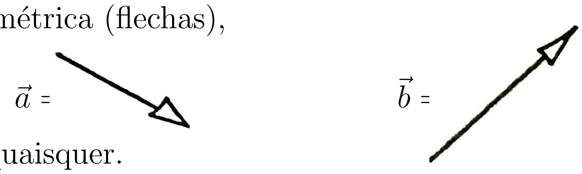
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{62,5^2 + 51,65^2} \\ &= 81,08\,\mathrm{km}\ . \end{aligned}$$

Problema 4

Como devem ser as direções relativas entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de modo a valer a igualdade $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$?

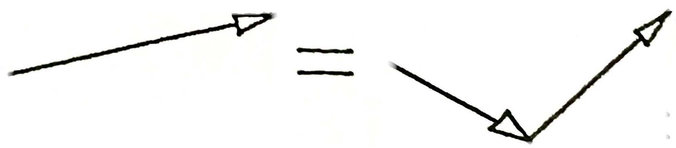
Resolveremos a questão tanto na representação de flechas como na de n-plas.

• Representação geométrica (flechas),

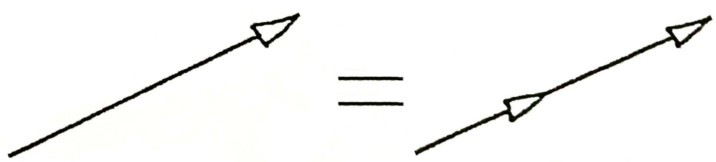


onde as flechas são quaisquer.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



Por outro lado a equação $|\vec{c}| = |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$ só será válida se as flechas tiverem a mesma direção e o mesmo sentido.



Em outras palavras, o ângulo entre elas deve ser $0°$.

• Representação algébrica (n-plas),

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (x, y) \\ \vec{b} &= (x', y') \end{aligned}$$

onde as n-plas são quaisquer (suponhamos duas dimensões, para facilitar).

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} + \vec{b} \\ (x + x', y + y') &= (x, y) + (x', y') \\ c &= a + b \\ \sqrt{(x + x')^2 + (y' + y')^2} &= \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 &= x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2} + x'^2 + y'^2 \\ xx' + yy' &= \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2} \end{aligned}$$

Eleva-se ao quadrado (onde há que se considerar que a igualdade $xx'+yy'=-\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}$, correspondente à igualdade $c = a - b$, tem o mesmo quadrado).

$$\begin{aligned} x^2x'^2 + 2xx'yy' + y^2y'^2 &= x^2x'^2 + x^2y'^2 + y^2x'^2 + y^2y'^2 \\ 0 &= xy' - x'y \\ \frac{y'}{x'} &= \frac{y}{x} \ . \end{aligned}$$

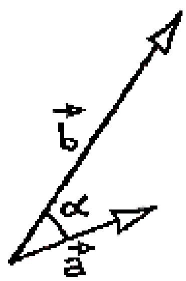
As projeções proporcionais significam que os dois vetores têm a mesma direção, e o caso $c = a + b$ (conforme o enunciado) corresponde ao mesmo sentido (o caso $c = a - b$, sentido contrário).

Produto Escalar

O *produto escalar* é mais uma operação que se define para vetores—além das operações necessárias para se definir um espaço vetorial, quais sejam, soma de vetores e multiplicação por um escalar. Nesta operação, os operandos são vetores e o resultado é um escalar. A notação utilizada é um ponto,

$$\vec{a} \, . \, \vec{b} \quad .$$

• Na representação geométrica, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são dois vetores que formam entre si um ângulo α,



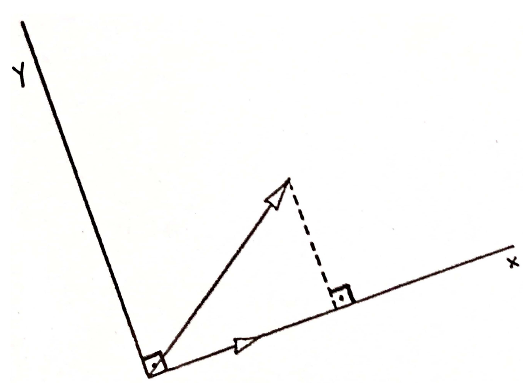
o produto escalar $\vec{a}.\vec{b}$ é

$$a \, b \, \cos \alpha \, .$$

• Na representação algébrica o produto escalar $(a_x, a_y, a_z).(b_x, b_y, b_z)$, ou $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, é

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \, .$$

Pode-se ilustrar numa situação simples que as duas definições são equivalentes. Consideremos um sistema de dois eixos (referencial) com um deles coincidindo com uma das flechas ($\vec{a}$ por exemplo) e o plano dos eixos contendo as flechas,



$$\begin{aligned} a_x b_x + a_y b_y &= a \, (b \, \cos \alpha) + \text{zero} \, . \, b_y \\ &= ab \, \cos \alpha \, . \end{aligned}$$

Ocorre que a quantidade $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ é conservada (não é alterada) quando se roda o sistema de eixos[8]. Ela é sempre igual a $ab \cos\alpha$. Assim, o produto escalar depende apenas dos vetores e não depende do particular sistema de eixos escolhido[9].

O produto escalar é *comutativo*, ou seja, não depende da ordem dos fatores. E *distributivo*; $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$.

Com o produto escalar pode-se calcular o ângulo formado por dois vetores dados,

$$\cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{ab} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{ab} \quad .$$

Exemplo. Na resolução algébrica do problema 4 (à página 16) a igualdade

$$xx' + yy' = \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}$$

é

$$\vec{a}.\vec{b} = ab$$

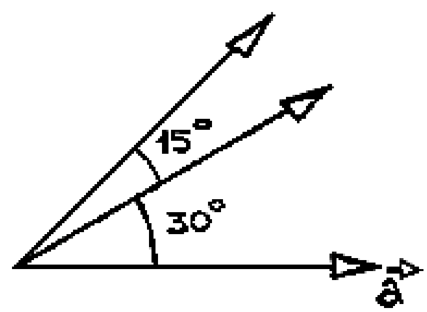
donde

$$\cos\alpha = \frac{ab}{ab} = 1$$

$$\alpha = 0° \ .$$

(Módulo de um vetor é a raiz quadrada do produto escalar consigo mesmo.)

Dois problemas propostos



1 - Calcule o módulo da resultante de três vetores com módulos iguais a 5 unidades e direções dadas pelos ângulos da figura, bem como o seu ângulo com o primeiro vetor $\vec{a}$. Resposta: 14,2 unidades; 25° 7' 56" .

2 - Determine algebricamente como devem ser as direções de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de modo a valer a igualdade $\left|\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2$. $\frac{y'}{x'} = -\frac{x}{y}$, vetores perpendiculares.

[8]Fato cuja demonstração encontra-se além do escopo do presente texto. Veja-se por exemplo Herbert Goldstein: *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, capítulo 4.

[9]Este é de fato o conceito de *escalar*, já referido à nota de rodapé 6 página 10 qual seja, um valor invariável sob mudança de sistema de coordenadas.

Capítulo 2

Cinemática

A *Cinemática* é a parte da Mecânica que trata da descrição dos movimentos. Por outro lado ao relacionarmos os movimentos com a inércia dos corpos e as forças aplicadas estaremos tratando com a parte da Mecânica denominada *Dinâmica*. A Dinâmica será objeto dos próximos três capítulos.

Quando um corpo se desloca ele pode girar. O corpo realiza nesse caso os movimentos de *translação* e de *rotação* concomitantemente. Contudo, se o corpo for suficientemente pequeno comparado com os deslocamentos que realiza poderemos desprezar suas dimensões e seu movimento de rotação. Um corpo nessas condições é denominado *partícula*. Neste e nos próximos três capítulos nos restringiremos ao estudo dos movimentos de translação.

O movimento de uma partícula é descrito fornecendo-se sua *posição* ($\vec{r}$) em cada instante (t). A posição escrita como função do tempo, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, recebe o nome de *equação horária*. Na descrição dos movimentos também são importantes a *velocidade* e a *aceleração* do corpo, como será mostrado a seguir.

Aproveitaremos ainda para introduzir neste capítulo os conceitos matemáticos de *derivada* e *integral*.

2.1 Velocidade e Aceleração

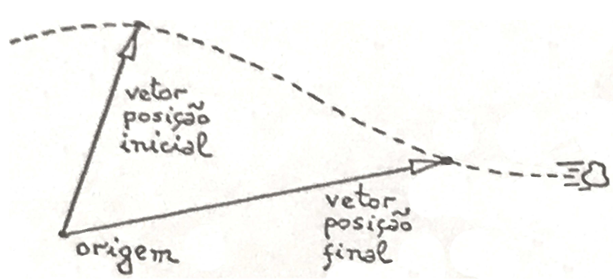
Apresentar-se-á inicialmente o conceito de velocidade média num intervalo de tempo e em seguida os conceitos de velocidade e aceleração instantâneas.

Velocidade Média

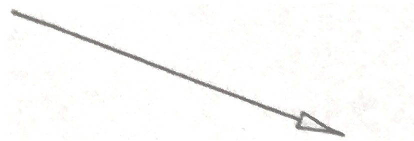
A *velocidade média* ($\vec{v}_{média}$) num intervalo de tempo é a variação do vetor posição (o vetor posição final menos o vetor posição inicial) dividida pelo intervalo de tempo,

$$\vec{v}_{média} = \frac{\triangle\vec{r}}{\triangle t} \, .$$

Consideremos uma partícula que se move num caminho e convencionemos uma origem no espaço físico. Em dois instantes diferentes, separados pelo intervalo de tempo $\triangle t$, podemos desenhar duas flechas da origem até a partícula, que representam as duas posições.



A variação do vetor posição, neste intervalo de tempo, será representada pela flecha

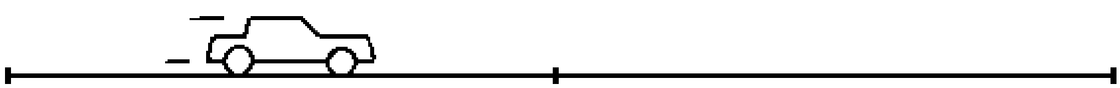


A flecha foi obtida somando-se o vetor posição final com o simétrico do vetor posição inicial. Divide-se agora pelo intervalo $\triangle t$, obtém-se uma flecha de mesma direção e sentido mas comprimento diferente,

A menos de um fator de escala arbitrário, que pode ser introduzido, esta última flecha representa a velocidade média da partícula no intervalo de tempo considerado.

Problema 5

Um automóvel percorre metade de um caminho retilíneo a $40\,\frac{\text{km}}{\text{hora}}$ e a outra metade a $60\,\frac{\text{km}}{\text{hora}}$. Calcule sua velocidade média nesse percurso.



Sendo retilínea a trajetória podemos resolver o problema apenas com escalares.

$$v_{média} = \frac{\triangle s}{\triangle t}$$

onde $\triangle s$ é o espaço percorrido,

$$= \frac{\triangle s}{\triangle t_1 + \triangle t_2}$$

$$\triangle t_1 = \frac{\triangle s/2}{v_1} = \frac{\triangle s}{80}$$

$$\triangle t_2 = \frac{\triangle s/2}{v_2} = \frac{\triangle s}{120}$$

$$= \frac{\triangle s}{\dfrac{\triangle s}{80} + \dfrac{\triangle s}{120}} = 48\,\frac{\text{km}}{\text{hora}} \quad .$$

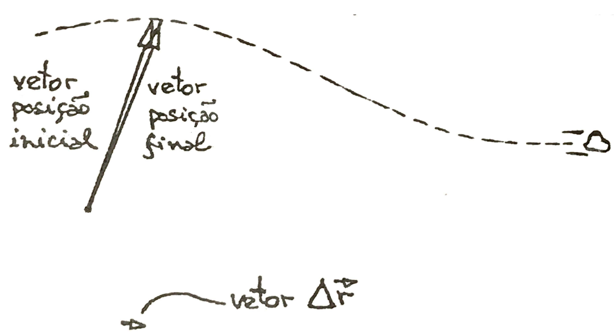
Problema 6

Um automóvel anda metade do tempo a $40\,\frac{\text{km}}{\text{hora}}$ e a outra metade do tempo a $60\,\frac{\text{km}}{\text{hora}}$ numa estrada retilínea. Calcule sua velocidade média.

$$
\begin{aligned}
v_{média} &= \frac{\triangle s}{\triangle t} \\
&= \frac{\triangle s_1 + \triangle s_2}{\triangle t} \\
& \qquad \triangle s_1 = 40\,\frac{\triangle t}{2} = 20\,\triangle t \\
& \qquad \triangle s_2 = 60\,\frac{\triangle t}{2} = 30\,\triangle t \\
&= \frac{20\,\triangle t + 30\,\triangle t}{\triangle t} = 50\,\frac{\text{km}}{\text{hora}} \ .
\end{aligned}
$$

Velocidade Instantânea; Derivada e Integral; Aceleração

A *velocidade num instante* (v) é a derivada da posição em relação ao tempo. Uma *derivada* é o valor para o qual tende a razão entre duas quantidades dependentes uma da outra, quando o divisor torna-se cada vez menor. Assim, por exemplo, se na figura da página 19 considerarmos um intervalo de tempo $\triangle t$ cada vez menor, a variação do vetor posição, $\triangle \vec{r}$, também em geral se modificará (ver figura), mas de tal modo que a razão $\frac{\triangle \vec{r}}{\triangle t}$ tende



a um valor determinado, tangente à trajetória, característico de cada posição (ou de cada instante). Quando o intervalo de tempo $\triangle t$ considerado é cada vez menor o deslocamento $\triangle \vec{r}$ torna-se proporcional a $\triangle t$ e a constante de proporcionalidade é a velocidade instantânea.

A seguir será apresentada uma conceituação detalhada de derivada. Consideremos, por simplicidade, no restante desta seção e na próxima seção, apenas o caso unidimensional, a menos quando especificado.

Seja uma função $y = y(x)$ contínua e unívoca[10] em um certo intervalo e consideremos x_0 um ponto desse intervalo e $\triangle x$ o acréscimo da variável x. Quando a variável, com valor x_0, sofre um acréscimo $\triangle x$ a função sofre um acréscimo $\triangle y = y(x_0 + \triangle x) - y(x_0)$. A relação

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y(x_0 + \triangle x) - y(x_0)}{\triangle x}$$

[10]Função unívoca num intervalo é aquela que assume um e apenas um valor para cada valor da variável independente contido no intervalo.

é a razão dos acréscimos. Chama-se *derivada da função* $y = y(x)$ *no ponto* x_0 ao limite, finito, caso exista, da razão dos acréscimos quando $\triangle x$ tende a zero,

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \ ,$$

e indica-se assim,

$$y'(x_0) \qquad \text{ou} \qquad \left.\frac{\triangle y}{\triangle x}\right|_{x_0}$$

(leia-se *derivada de* y *com relação a* x *no ponto* x_0).

Como exemplo vejamos o caso da derivada de uma potência. As funções potência e os polinômios são usados para descrever alguns movimentos simples. A definição de derivada é

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{y(x + \triangle x) - y(x)}{\triangle x} \quad .$$

Se a função y é a potência x^n, onde n é constante, teremos

$$\frac{dx^n}{dx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x + \triangle x)^n - x^n}{\triangle x} \quad .$$

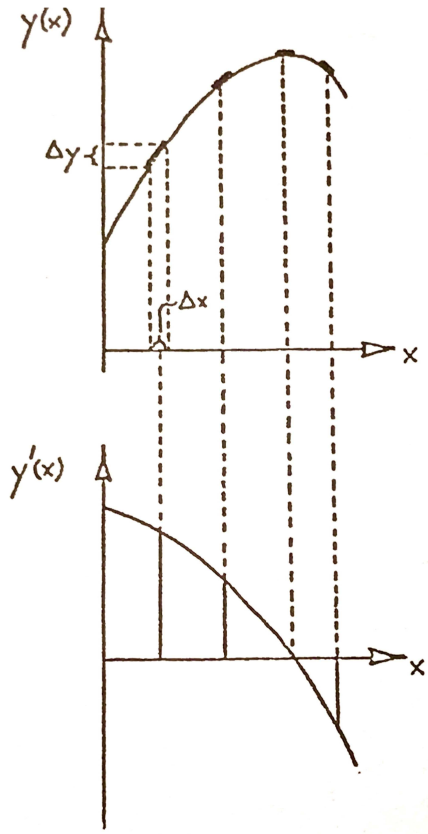
A quantidade $(x+\triangle x)^n$, conhecida como *Binômio de Newton*, é igual a $x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}\triangle x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\triangle x)^2 + \ldots + (\triangle x)^n$. Teremos

$$\begin{aligned}
\frac{dx^n}{dx} &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\cancel{x^n} + \frac{n}{1!}x^{n-1}.\triangle x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\triangle x)^2 + \ldots - \cancel{x^n}}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \left(n\, x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}.\triangle x + \ldots \right) \\
&= n\, x^{n-1} \ ,
\end{aligned}$$

ou seja, para derivar uma potência multiplicamo-la pelo expoente e diminuímos esse expoente de uma unidade. Por exemplo, a derivada de x^3 no ponto $x = 2$ é

$$\left.\frac{dx^3}{dx}\right|_2 = \left.3x^2\right|_2 = 3.2^2 = 12 \ .$$

Graficamente a derivada é a inclinação da curva do gráfico. A inclinação da curva em um ponto é o coeficiente angular $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ da reta tangente à curva naquele ponto. A altura (ou seja, o valor da ordenada) do gráfico da função $y'(x)$ é igual à inclinação da função $y(x)$.



Passemos agora ao conceito de integral. Conforme se mostrará adiante a operação de integração é a inversa à operação de derivação, ou seja, para obtermos a função primitiva $y(x)$ a partir da derivada $y'(x)$ deve-se integrar $y'(x)$ ao longo da variável x.

Seja a função $y' = y'(x)$ unívoca no intervalo $a \leq x \leq b$. A integral dessa função desde a até b é o limite da somatória dos produtos $y'(x).\triangle x$ quando os incrementos $\triangle x$ tendem a zero,

$$\lim_{\triangle x \to 0} \sum_a^b y'(x).\triangle x \quad .$$

Denota-se esta integral com o símbolo

$$\int_a^b y'(x)\,dx$$

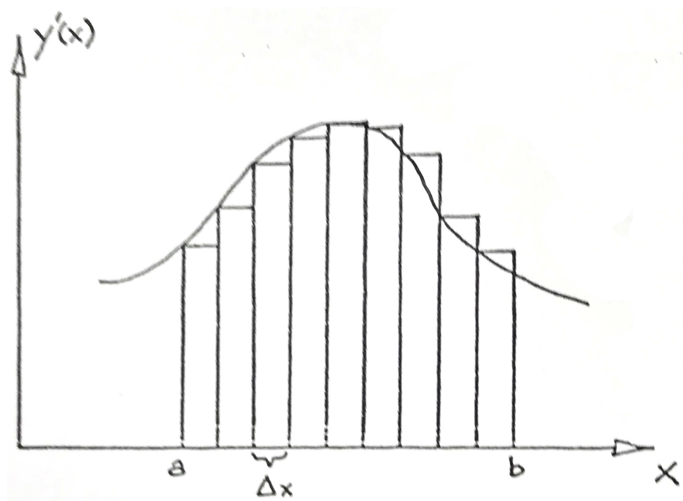
e lê-se *integral (definida) da função* $y'(x)$ *ao longo da variável* x *desde* a *até* b. A função $y'(x)$ recebe o nome de *integrando* e dx é chamado *diferencial da variável* x. O produto $y'(x)\,dx$ é o *elemento de integração*.

Se substituirmos o limite superior b da integral pela própria variável x (e substituindo, no integrando, a variável x pela variável de integração $x_{\text{int.}}$) o resultado da operação $\int_a^x y'(x_{\text{int.}})\,dx_{\text{int.}}$ (ou seja, $\lim_{\triangle x_{\text{int.}} \to 0} \sum_a^x y'(x_{\text{int.}})\,\triangle x_{\text{int.}}$) passa a ser uma função de x, denominada *função integral*, *função primitiva* ou *integral indefinida* da função $y'(x)$.

Deduzamos a expressão da integral de uma potência. Para tanto utilizaremos o fato (demonstrado à página 26) de que a integração é a operação inversa da derivação. Sabemos

que
$$\frac{dx^{n+1}}{dx} \;=\; (n+1)\, x^n \quad .$$
Integrando ambos os membros tem-se
$$\int_0^x \frac{dx^{n+1}}{dx}\, dx \;=\; (n+1)\int_0^x x^n \; dx \quad .$$
A integral da derivada é a própria função, e então
$$\int_0^x x^n \; dx \;=\; \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad .$$
Assim, para integrar uma potência soma-se uma unidade ao expoente e divide-se pelo expoente mais um.

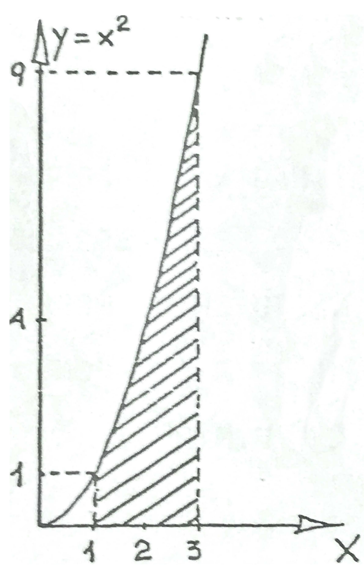
Notemos que $\lim_{\triangle x \to 0} \sum_a^b y'(x) \triangle x$ é o valor da área sob o gráfico da função $y'(x)$. A somatória $\sum_a^b y'(x) \triangle x$ é a área de uma sequência de retângulos como mostra a figura;



e no limite em que $\triangle x$ tende a zero a somatória reproduz a área sob a curva.

Por exemplo, a integral $\int_1^3 x^2 dx$ é
$$\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 8,66 \quad .$$

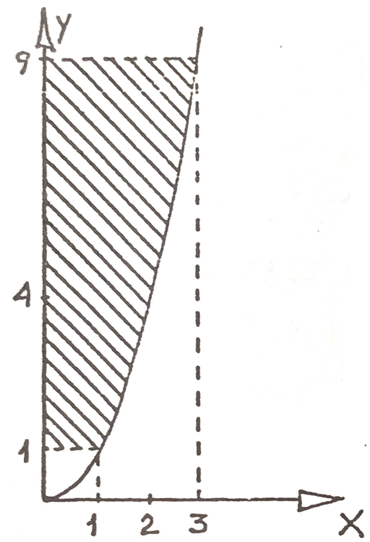
Este é o valor da área hachurada na figura que segue.



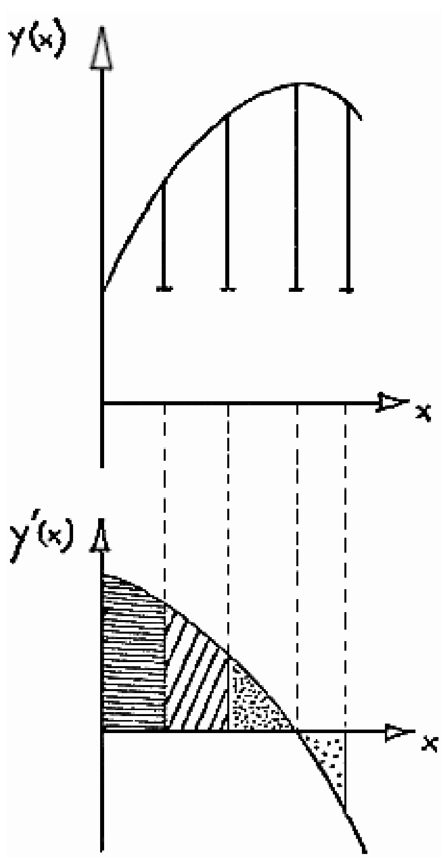
Ainda exemplificando note-se que $x = \sqrt{y}$. Calculemos $\int_1^9 \sqrt{y}\, dy$,

$$\begin{aligned} \int_1^9 y^{\frac{1}{2}} dy &= \left. \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_1^9 = \frac{2}{3}\left(9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= 17,33 \ . \end{aligned}$$

Este é o valor da área hachurada junto ao eixo y.



Os gráficos da figura à página 23 podem ser entendidos do ponto de vista da definição de integral. Na figura abaixo a altura $y(x) - y(\text{zero})$ no gráfico superior representa a área acumulada sob o gráfico inferior, até o valor da coordenada x; e quando $y'(x) < 0$ a área acumulada diminui.



Para demostrar que a integração é a operação inversa da derivação deduzamos a definição de integral a partir da definição de derivada. Se a função $y'(x)$ é a derivada de uma função $y(x)$, ou seja

$$y'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \quad ,$$

procuremos qual é a operação algébrica que deve ser realizada para se obter $\triangle y$ a partir de $y'(x)$ e $\triangle x$. Multipliquemos ambos os membros da igualdade por $\triangle x$ e consideremos o limite quando $\triangle x$ tende a zero,

$$\begin{aligned} \lim_{\triangle x \to 0} \triangle x.\, y'(x) &= \lim_{\triangle x \to 0} \left(\triangle x. \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \right) \\ &= \lim_{\triangle x \to 0} \cancel{\triangle x} \frac{\triangle y}{\cancel{\triangle x}} \quad . \end{aligned}$$

Somemos membro a membro as igualdades desde x_0 até x,

$$\sum_{x_0}^{x_1} \lim_{\triangle x \to 0} \triangle x.\, y'(x) = \sum_{x_0}^{x_1} \lim_{\triangle x \to 0} \triangle y \quad .$$

A soma dos limites é o limite da soma,

$$\begin{aligned} \lim_{\triangle x \to 0} \sum_{x_0}^{x_1} y'(x) \, \triangle x &= \lim_{\triangle x \to 0} \sum_{x_0}^{x_1} \triangle y \\ y(x_1) - y(x_0) &= \lim_{\triangle x \to 0} \sum_{x_0}^{x_1} y'(x) \, \triangle x \quad , \end{aligned}$$

que é a definição de integral. Note-se que a integral indefinida $y(x)$, que é $y(x_0) + \lim_{\triangle x \to 0} \sum_{x_0}^{x} y'(x) \triangle x$, é determinada a menos de uma constante aditiva $y(x_0)$ (qualquer função $y_{(x)}$ + constante tem a mesma derivada que $y_{(x)}$).

A respeito das funções integrais e derivadas podemos afirmar,

- Num extremo (máximo ou mínimo) ou num ponto estacionário da função integral a derivada é nula.
- Um zero (se existir) não tem relação com um zero (se existir) da derivada. São situações independentes.
- Num máximo da integral sua derivada segunda (derivada da derivada) é negativa.
- Num mínimo da integral sua derivada é positiva.
- Num ponto estacionário da integral sua derivada segunda é nula.
- Num ponto de inflexão da integral (ponto em que a curvatura muda de sentido) sua derivada segunda é nula.
- Num ponto de inflexão da integral sua derivada primeira tem um extremo.
- Um vértice (ou *quina*) na função integral corresponde a um salto (descontinuidade) na derivada.

A velocidade $\vec{v}$ é a derivada da posição $\vec{r}$ em relação ao tempo. Podemos denotá-la por $\frac{d\vec{r}}{dt}$. A aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo, $\frac{d\vec{v}}{dt}$.

A variação da velocidade é a integral da aceleração ao longo do tempo. A variação da posição é a integral da velocidade ao longo do tempo.

Problema 7

O movimento de um corpo é descrito pela função horária $s = t^3 - 6t^2 + 5t$ (s em metros, t em segundos). Desenhe os gráficos da velocidade e aceleração (escalares) em função do tempo.

Desenharemos também o gráfico da função horária. Para isto é interessante conhecer os zeros da função. Igualemos $s(t)$ a zero,

$$\begin{aligned}
t^3 - 6t^2 + 5t &= 0 \\
(t^2 - 6t + 5)\,t &= 0 \quad \rightarrow \quad t_{1_{(s=0)}} = 0\,\mathrm{s}\,. \\
&\downarrow \\
t^2 - 6t + 5 &= 0 \\
t &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \quad \begin{array}{l} \nearrow\; t_{2_{(s=0)}} = 1\,\mathrm{s}\,. \\ \searrow\; t_{3_{(s=0)}} = 5\,\mathrm{s}\,. \end{array}
\end{aligned}$$

A velocidade é a derivada da posição,

$$v = 3t^2 - 12t + 5\ .$$

Para desenhar seu gráfico achemos seus zeros,

$$\begin{aligned}
3t^2 - 12t + 5 &= 0 \\
t &= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 60}}{6} \quad \begin{array}{l} \nearrow\; t_{1_{(v=0)}} = 0{,}47\,\mathrm{s}\,. \\ \searrow\; t_{2_{(v=0)}} = 3{,}55\,\mathrm{s}\,. \end{array}
\end{aligned}$$

As posições em $t = 0{,}47\,\mathrm{s}$ e $t = 3{,}55\,\mathrm{s}$ (posições extremas) serão respectivamente

$$\begin{aligned}
0,47^3 - 6\,.\,0,47^2 + 5\,.\,0,47 &= 1,13\,\mathrm{m} \\
\text{e} \quad 3,55^3 - 6\,.\,3,55^2 + 5\,.\,3,55 &= -13,13\,\mathrm{m}\,.
\end{aligned}$$

A aceleração é a derivada da velocidade,

$$a = 6t - 12\ \ .$$

Achemos seu zero,

$$\begin{aligned}
6t - 12 &= 0 \\
t_{(a=0)} &= 2\,s\,.
\end{aligned}$$

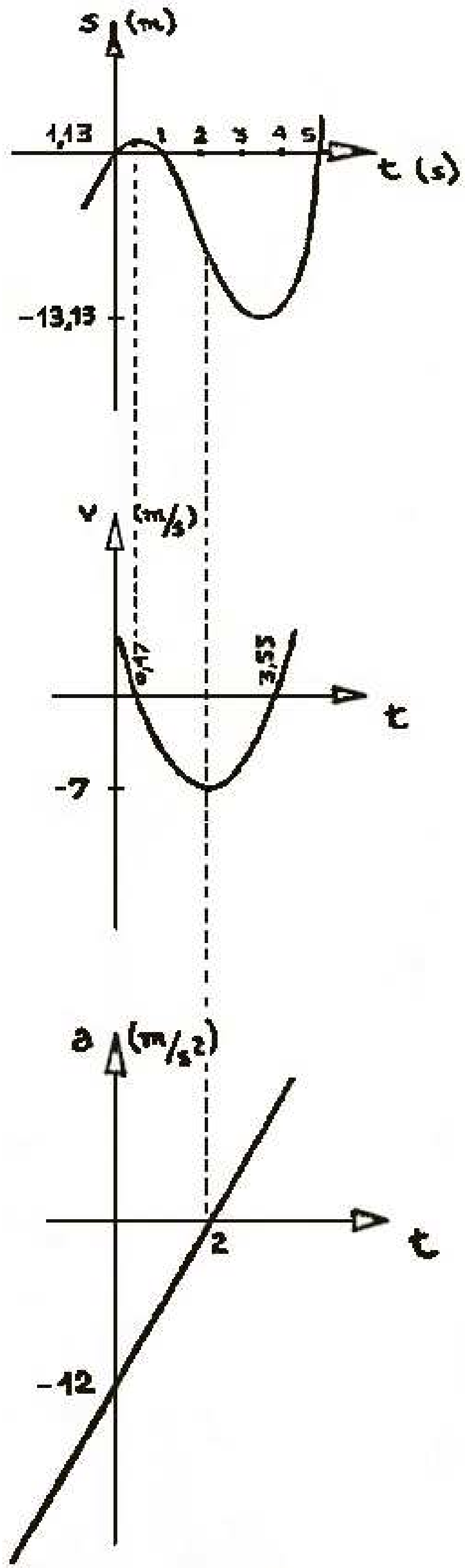
A velocidade em $t = 2\,\mathrm{s}$ (velocidade extrema) é

$$3\,.\,2^2 - 12\,.\,2 + 5 = -7\,\mathrm{m/s}\ .$$

A posição em $t = 2\,\mathrm{s}$ (inflexão da curva horária) é

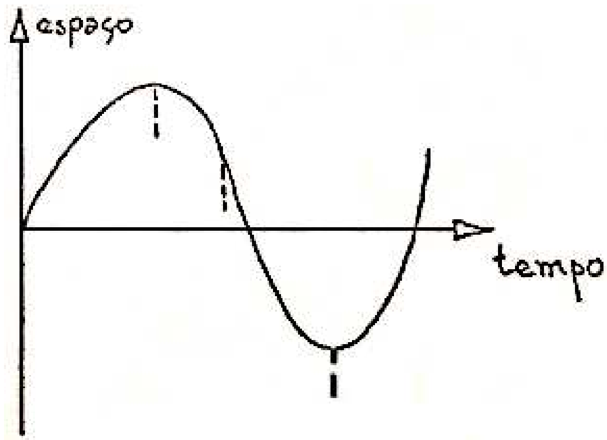
$$2^3 - 6\,.\,2^2 + 5\,.\,2 = -6\,\mathrm{m}\,.$$

Os gráficos encontram-se na figura.

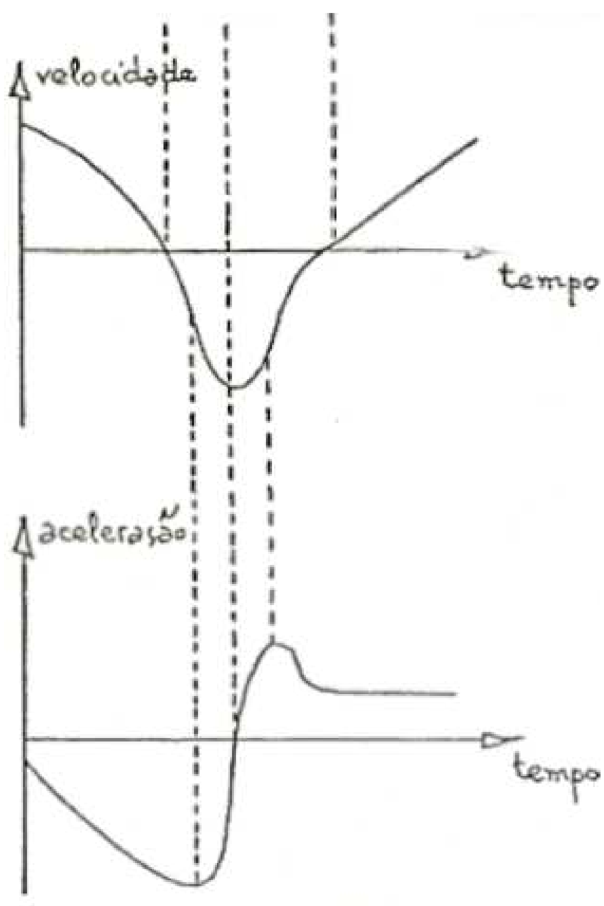

s (m)
1,13
1
2
3
4
5
t (s)
−13,13
v (m/s)
0,47
3,53
t
-7
a (m/s2)
t
2
−12

Problema 8

Dado o seguinte gráfico espaço x tempo esboce qualitativamente os gráficos velocidade x tempo e aceleração x tempo correspondentes.

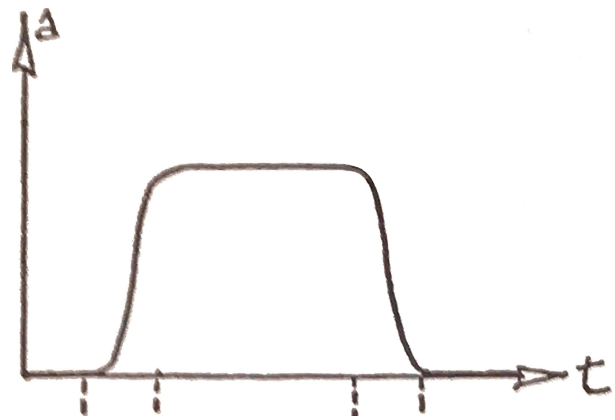


Seguem os gráficos.

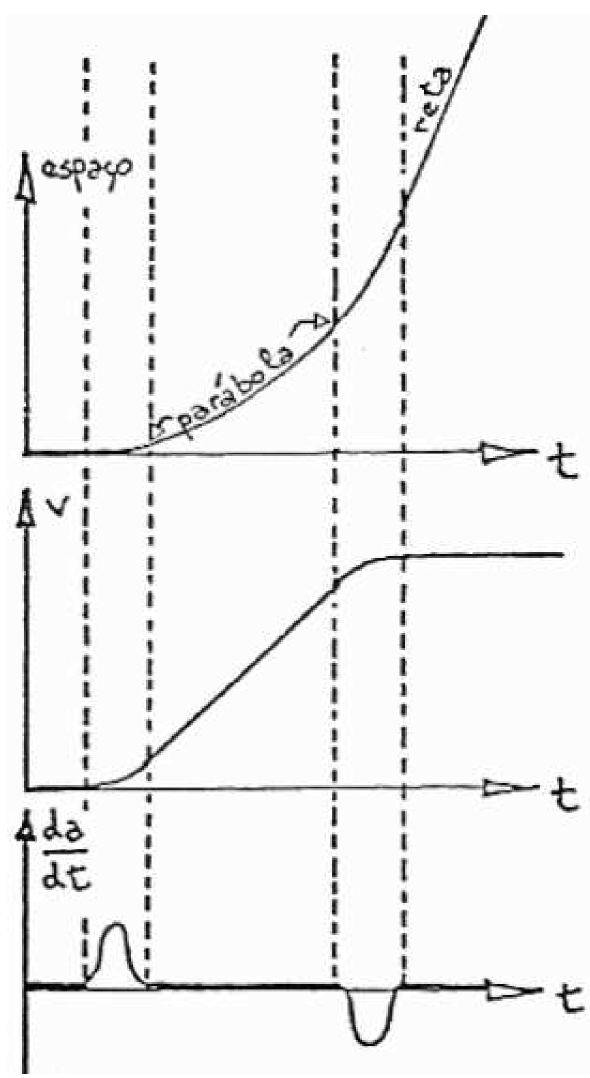


Problema 9

Um foguete se move com aceleração (escalar) dada pelo gráfico seguinte.



Esboce qualitativamente os gráficos da velocidade, do espaço percorrido e da derivada da aceleração em relação ao tempo, em função do tempo. Suponha velocidade inicial e espaço inicial nulos.



2.2 Os Movimentos Mais Simples

São os movimentos *retilíneo uniforme* e *retilíneo uniformemente variado*.

Movimento Retilíneo Uniforme

Neste movimento a aceleração é nula e a velocidade é constante,

$$a = 0 \; .$$

A velocidade é a integral da aceleração, e como o integrando é nulo a integral também é nula[11],

$$\begin{aligned} v(t) - v(0) &= \int_0^t a \, dt = 0 \\ v(t) &= v(0) \; , \end{aligned}$$

ou seja, a velocidade é constante. Integrando a velocidade ao longo do tempo tem-se a equação horária;

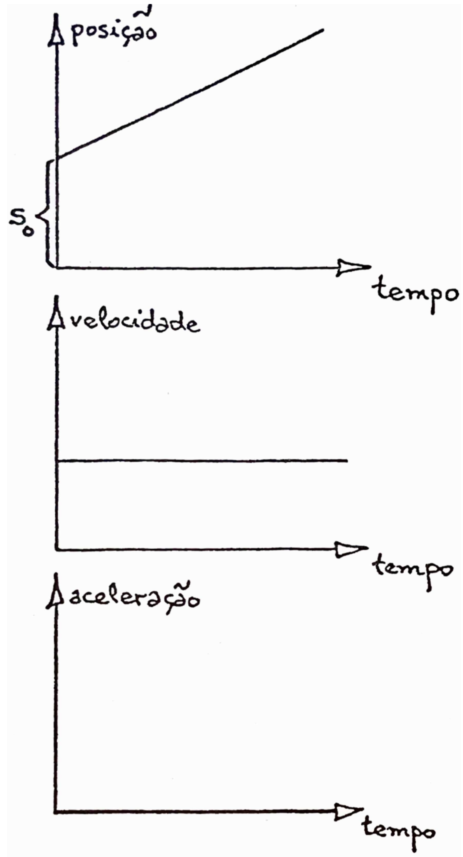
$$\begin{aligned} s(t) - s(0) &= \int_0^t v \, dt \\ &= v \int_0^t dt \; , \end{aligned}$$

porque o integrando é constante, donde

$$s(t) = s(0) + v\, t$$

($s(0)$, ou s_0, é a posição inicial). Gráficos relativos a este movimento são os seguintes.

[11] A rigor deve-se escrever $\int_0^t a \, dt_i$ onde t_i é a variável de integração, mas por simplicidade e suficiência omitir-se-á doravante o subscrito i nas integrais indefinidas.



Movimento Retilíneo Uniformemente Variado

Neste movimento a aceleração é constante diferente de zero,

$$a(t) = a \quad (a \neq 0) \ .$$

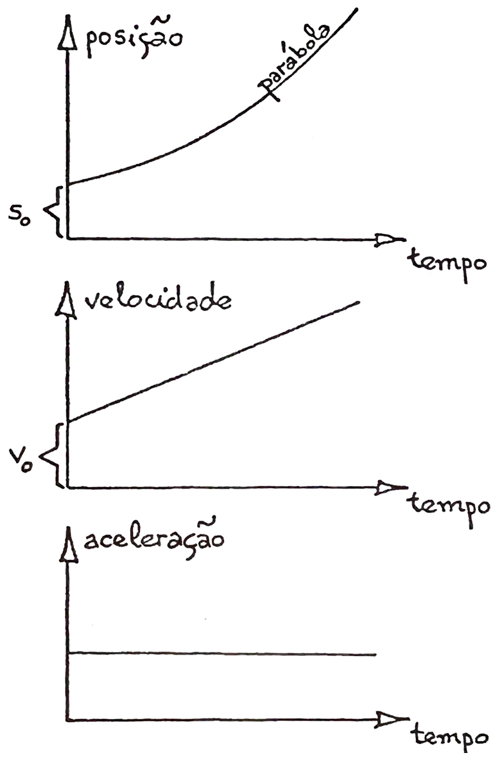
Integrando,

$$\begin{aligned} v(t) - v(0) &= \int_0^t a \, dt \\ v(t) &= v(0) + a\,t \ , \end{aligned}$$

onde $v(0)$, ou v_0, é a velocidade inicial. A equação horária será

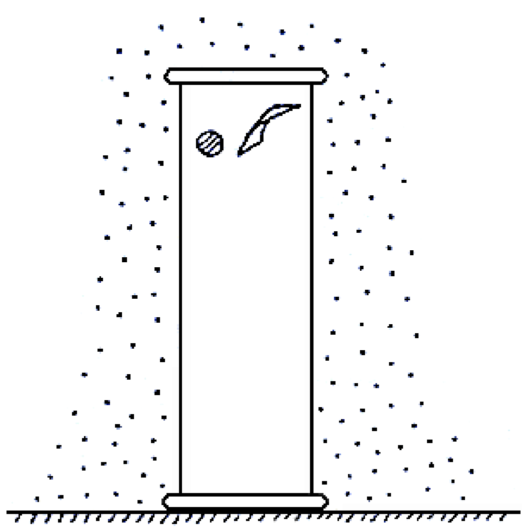
$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + \int_0^t (v_0 + at)\, dt \\ &= s_0 + \int_0^t v_0 \, dt + \int_0^t at \, dt \\ &= s_0 + v_0\, t + \tfrac{1}{2}\, a\, t^2 \end{aligned}$$

(a integral de uma potência está descrita nas páginas 23 e 24). Seguem os gráficos.



Queda Livre na Terra

O exemplo mais comum de movimento com aceleração (aproximadamente) constante é o de um corpo que cai, próximo à superfície da Terra. Façamos uma experiência. Dentro de um tubo vertical do qual foi retirado o ar deixemos cair juntos uma pedra e uma folha de papel.



Observaremos que os dois corpos chegam juntos ao chão. Na ausência de resistência do ar todos os corpos caem com a mesma aceleração, em um mesmo lugar da superfície da Terra, independentemente de sua forma, tamanho ou constituição. É a *queda livre*, ou *gravidade*.

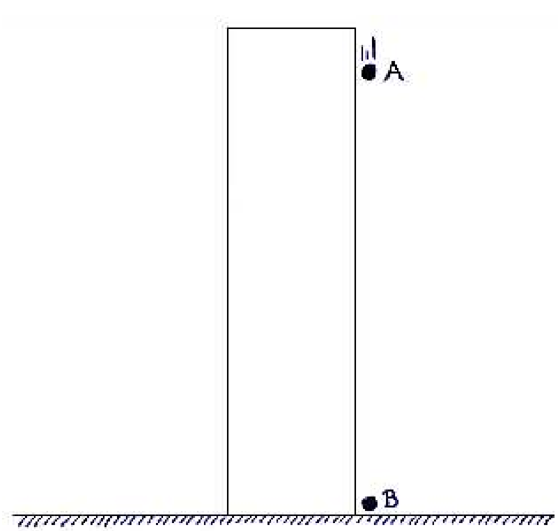
Quando o percurso da queda não é muito grande a aceleração permanece constante durante o movimento. Próximo à superfície terrestre os corpos caem com aceleração de 9,78 m/s^2 no Equador e 9,83 m/s^2 nos polos. Esta aceleração é habitualmente indicada com o símbolo $\vec{g}$.

Apresenta-se a seguir uma tabela contendo os espaços percorridos e as velocidades para um corpo que cai verticalmente a partir do repouso. Adotaremos por simplicidade o valor de 10 m/s^2 para $|\vec{g}|$. O leitor pode calcular os valores desta tabela com as fórmulas do espaço e da velocidade do movimento retilíneo uniformemente variado.

tempo (s)	espaço percorrido (m)	espaço percorrido em cada segundo (m)	velocidade (m/s)
0	0		0
1	5	5	10
2	20	15	20
3	45	25	30
4	80	35	40
5	125	45	50
6	180	55	60
⋮	⋮	⋮	⋮

Problema 10

Um corpo A é abandonado do alto de um prédio cuja altura é 125 m. Após 1 s é lançado um corpo B verticalmente para cima a partir da base do prédio, com velocidade inicial 50 m/s. Calcule o instante e a altura do choque.



Consideremos a origem dos espaços no chão e o sentido positivo para cima. O choque ocorrerá quando as alturas dos corpos A e B, considerados como partículas, forem iguais,

$$\begin{aligned}
h_{\mathrm{B}} &= h_{\mathrm{A}} \\
0 + 50\, t_{\mathrm{B}} - \tfrac{1}{2}\, t_{\mathrm{B}}^2 &= 125 + 0.t_{\mathrm{A}} - \tfrac{1}{2}\, t_{\mathrm{A}}^2 \\
50\, t_{\mathrm{B}} - 5\, t_{\mathrm{B}}^2 &= 125 - 5\, t_{\mathrm{A}}^2 \ .
\end{aligned}$$

Ocorre que $t_{\mathrm{B}} = t_{\mathrm{A}} - 1$ porque B foi lançado 1 s após A,

$$\begin{aligned}
50\,(t_{\mathrm{A}} - 1) - (t_{\mathrm{A}} - 1)^2 &= 125 - 5\, t_{\mathrm{A}}^2 \\
t_{\mathrm{choque}} &= 3\,\mathrm{s}\ (\text{após o lançamento de A})\ .
\end{aligned}$$

Obtenhamos a altura de A (ou B) no instante 3 s.

$$\begin{aligned}
h_{\mathrm{choque}} &= 125 - 5\,.\,3^2 \\
&= 80\,\mathrm{m}\ .
\end{aligned}$$

2.3 Composição de Movimentos

Os movimentos são descritos por vetores dependentes do tempo. Podemos compor dois ou mais movimentos somando vetores posição, somando vetores velocidade e somando vetores aceleração.

Dada uma partícula A e dois referenciais b e c que mantém eixos respectivamente paralelos entre si tem-se

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{\mathrm{A},\,c} &= \vec{r}_{\mathrm{A},\,b} + \vec{r}_{b,\,c} \\
\vec{v}_{\mathrm{A},\,c} &= \vec{v}_{\mathrm{A},\,b} + \vec{v}_{b,\,c} \\
\vec{a}_{\mathrm{A},\,c} &= \vec{a}_{\mathrm{A},\,b} + \vec{a}_{b,\,c}
\end{aligned}$$

onde $\vec{r}_{\mathrm{A},\,b}$ é o vetor posição da partícula com relação ao referencial b, $\vec{r}_{b,\,c}$ é o vetor posição do referencial b com relação ao referencial c, e definições análogas para os demais vetores. Por exemplo, um homem corre sobre um vagão que se move; valem as igualdades acima (veja-se a propósito a figura à página 11).

Problema 11

Dadas as funções horárias que descrevem o movimento de uma partícula,

$$\begin{aligned}
x(t) &= 10\, t \\
y(t) &= -5\, t^2 + 30\, t \ ,
\end{aligned}$$

com x e y em metros e t em segundos, escreva as expressões dos vetores posição, velocidade e aceleração dessa partícula e a equação de sua trajetória.

O vetor posição é

$$(10t, -5t^2 + 30t)\,\mathrm{m} \quad .$$

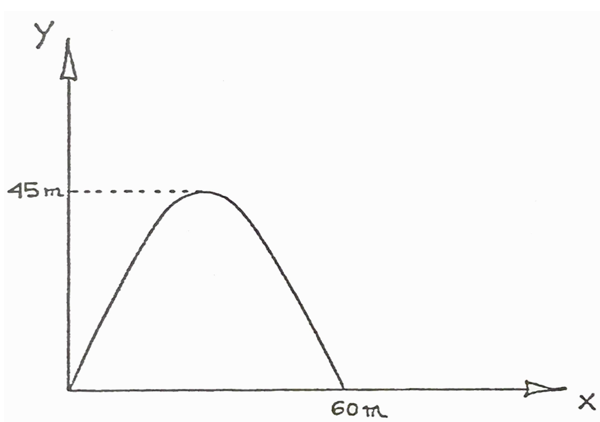
Derivando em relação ao tempo tem-se a velocidade e a aceleração,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (10, -10t + 30)\,\mathrm{m/s} \quad , \\ \vec{a} &= (0, -10)\,\mathrm{m/s^2} \quad . \end{aligned}$$

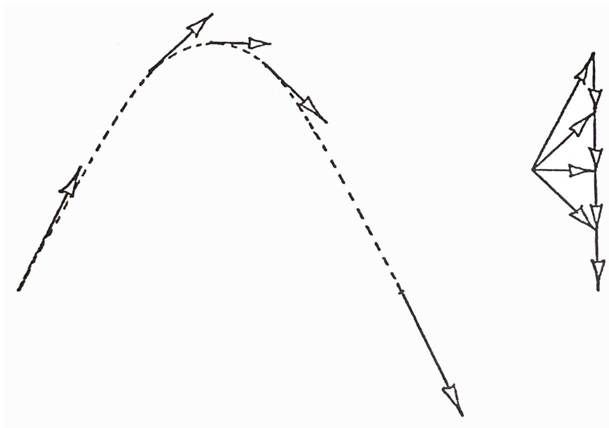
A equação da trajetória é a função $y(x)$. Isolando t das funções $x(t)$ e $y(t)$ tem-se

$$\begin{aligned} y &= -5\left(\frac{x}{10}\right)^2 - 30\,\frac{x}{10} \\ y(x) &= -\frac{x^2}{20} + 3\,x \quad . \end{aligned}$$

A função $y(x)$ é uma potência do segundo grau, expressão algébrica de uma parábola.



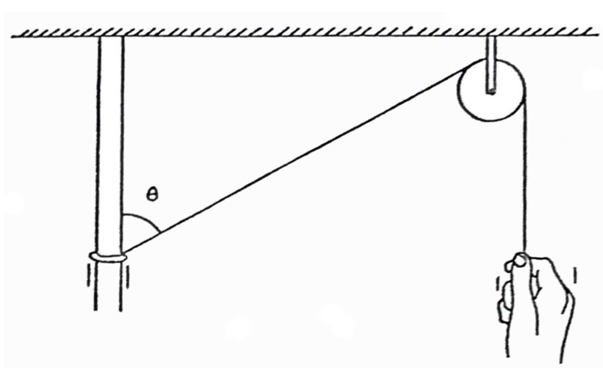
Este é (aproximadamente) o movimento que ocorre quando um objeto é lançado obliquamente em relação ao chão, numa condição em que se possa desprezar a resistência do ar, como é o caso do lançamento de um corpo pequeno e massivo. Trata-se da composição de um movimento retilíneo uniforme horizontal com um movimento retilíneo uniformemente variado vertical. Na figura a seguir desenhou-se vetores velocidade em intervalos regulares de tempo durante um lançamento oblíquo. Ao lado foram esses mesmos vetores desenhados com a mesma origem; observe que todas as variações de velocidade apontam verticalmente para baixo. Ou seja, em qualquer instante a aceleração está dirigida verticalmente para baixo.



O tempo de voo no lançamento oblíquo é $\dfrac{2\,v_0\,\text{sen}\theta}{g}$ onde v_0 é o módulo da velocidade inicial e θ é o ângulo de lançamento. O alcance é $\dfrac{v_0^2}{g}\,\text{sen}2\theta$. A dedução destas expressões está sugerida como problema (página 48).

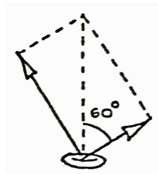
Problema 12

No dispositivo representado na figura a seguir, puxando-se a extremidade da corda, que é inextensível, o anel desliza ao longo da haste fixa. No instante em que o ângulo θ vale $60°$ a velocidade da extremidade da corda é $1\,\text{m/s}$. Qual é a velocidade do anel nesse instante?



A velocidade do anel ($\vec{v}_{\text{anel}}$) é um vetor dirigido ao longo da haste.

Esta velocidade pode ser decomposta num componente ao longo da corda e noutro perpendicular a ela.



O componente na direção da corda tem módulo igual à velocidade da mão ($v_{\text{mão}}$) porque a corda tem comprimento constante. Da figura temos

$$\begin{aligned} v_{\text{anel}} &= \frac{v_{\text{mão}}}{\cos 60°} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &= 2\,\text{m/s} \ . \end{aligned}$$

(Comentário. É errado no caso tentar projetar vetor que esteja na direção da corda sobre a direção da haste.)

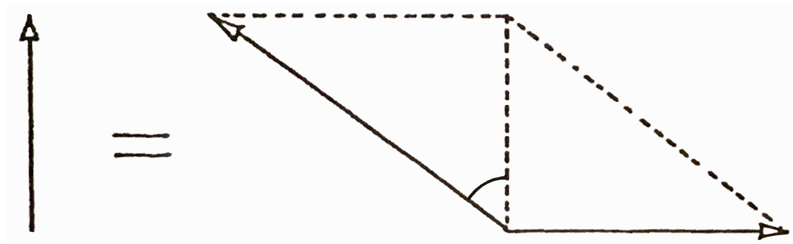
Problema 13

Um barco caminha com velocidade 5 km/hora em relação à água e deve atravessar um rio cuja largura é 150 m. A velocidade da água do rio é 4 km/hora (em relação à terra). Em que direção deverá ser orientado o barco para que atravesse o rio perpendicularmente às margens? Nesta situação quanto tempo demorará para atravessar o rio?

O barco possuirá em relação à terra sua velocidade em relação à água ($\vec{v}_{b,a}$) e também a velocidade da água (na qual está boiando) em relação à terra ($\vec{v}_{a,t}$),

$$\vec{v}_{b,t} = \vec{v}_{b,a} + \vec{v}_{a,t} \ .$$

A soma das duas velocidades ($\vec{v}_{b,t}$) deve apontar perpendicularmente à margem,



onde θ é o ângulo que o barco forma com a perpendicular ao rio. Da figura tem-se

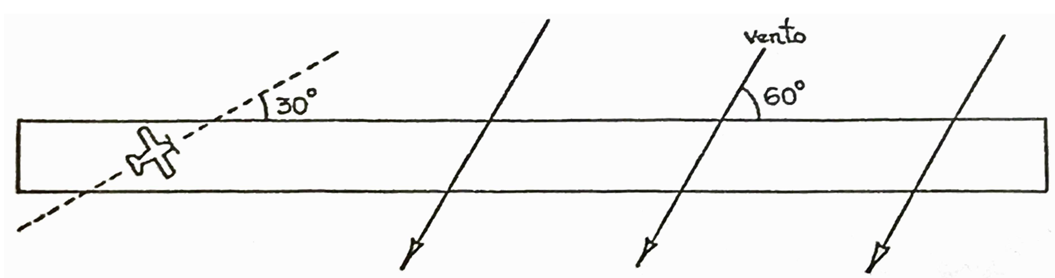
$$\begin{aligned}\theta &= \operatorname{arcsen}\frac{4}{5}\\ &= 53^\circ\ 7'\ 48'' \ .\end{aligned}$$

O tempo para atravessar é determinado pela velocidade $\vec{v}_{b,t}$ perpendicular ao rio,

$$\begin{aligned}t_{\text{atravessar}} &= \frac{\text{largura}}{v_{b,t}}\\ &= \frac{150}{5\,000\ \cos 53^\circ 7' 48''}\\ &= 0,05\,\text{horas} \quad = \quad 3\,\text{minutos} \ .\end{aligned}$$

Problema 14

No instante em que o avião pousava na pista de um aeroporto o vento tinha velocidade 60 km/h em relação ao chão e sua direção formava uma ângulo de 60° com a direção da pista. Para voar na direção da pista o avião estava dirigido de modo a formar um ângulo de 30 ° com a pista (ver figura). Qual foi a velocidade com que a roda do avião tocou o solo?

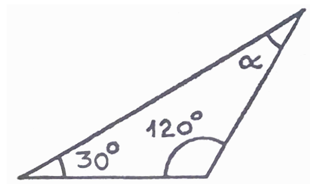


A velocidade do avião em relação ao chão $\vec{v}_{\text{avião,chão}}$ é a velocidade do avião em relação ao ar $\vec{v}_{\text{avião,ar}}$ mais a velocidade do ar em relação ao chão (velocidade do vento $\vec{v}_{\text{ar,chão}}$),

$$\vec{v}_{\text{avião,chão}} = \vec{v}_{\text{avião,ar}} + \vec{v}_{\text{ar,chão}} \quad .$$

Na representação de flechas temos

Temos aqui um triângulo isóceles porque possui dois ângulos iguais (na figura abaixo $\alpha = 180° - 30° - 120° = 30°$).

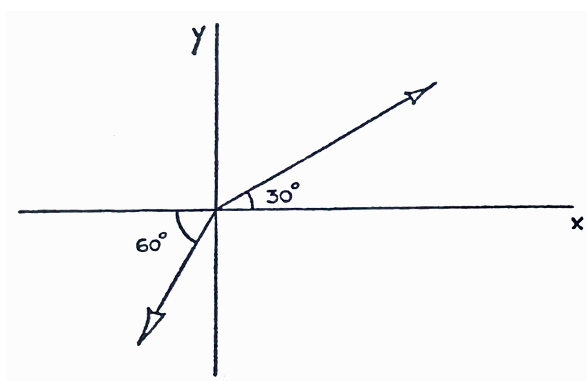


Então dois lados do triângulo são iguais,

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{avião,chão}} &= \vec{v}_{\text{ar,chão}} \\ &= 60\,\text{km/h} \ . \end{aligned}$$

Comentário. Caso o triângulo não fosse isóceles aplicaríamos a lei dos co-senos $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$ para calcular o lado não conhecido.

Resolvamos novamente o problema numa representação por projeções. Escolhamos um eixo x paralelo à pista e um eixo y perpendicular a ela.



A resultante deve estar no eixo x,

$$\begin{aligned} v_{\text{avião,chão}} &= v_{\text{avião,ar}} \cos 30° - v_{\text{ar,chão}} \cos 60° \\ &= v_{\text{avião,ar}} \frac{\sqrt{3}}{2} - v_{\text{ar,chão}} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e calculamos $v_{\text{avião,ar}}$ no eixo y,

$$\begin{aligned} \text{zero} &= v_{\text{avião,ar}} \,\text{sen}\, 30° - v_{\text{ar,chão}} \,\text{sen}\, 60° \\ v_{\text{avião,ar}} &= 60\sqrt{3}\,\text{km/h} \ . \end{aligned}$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} v_{\text{avião,chão}} &= 60\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 30 \\ &= 60\,\text{km/h} \ . \end{aligned}$$

2.4 Movimento Circular

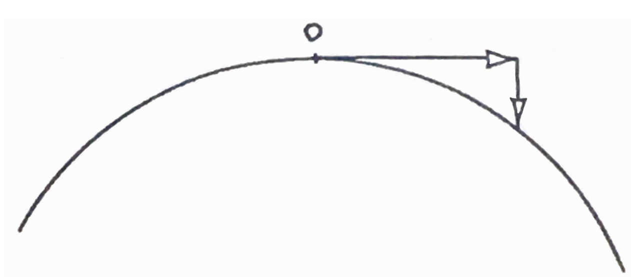
O *movimento circular* é aquele cuja trajetória é uma circunferência. Iniciaremos o estudo resolvendo o problema de um satélite. Será apresentada uma resolução baseada na ideia de se obter o movimento circular a partir da composição de dois movimentos. E no final desta seção resolveremos novamente o mesmo problema aplicando a fórmula da aceleração centrípeta.

Problema 15

Calculemos a velocidade de um satélite em órbita circular próxima à superfície da Terra. O raio da Terra será considerado igual a 6 371 km[12] e consideraremos $g = 10\,\text{m/s}^2$.

O satélite está constantemente sendo atraído pela Terra. Num intervalo de tempo infinitesimal somemos o deslocamento horizontal que ele tem devido à velocidade inicial com o deslocamento vertical para baixo devido à atração do planeta. Consideraremos o intervalo de tempo de um segundo o qual, embora não seja infinitesimal, será suficientemente pequeno porque o satélite nesse intervalo percorre um comprimento pequeno comparado com o raio da Terra (como veremos ele se desloca 8 km aproximadamente).

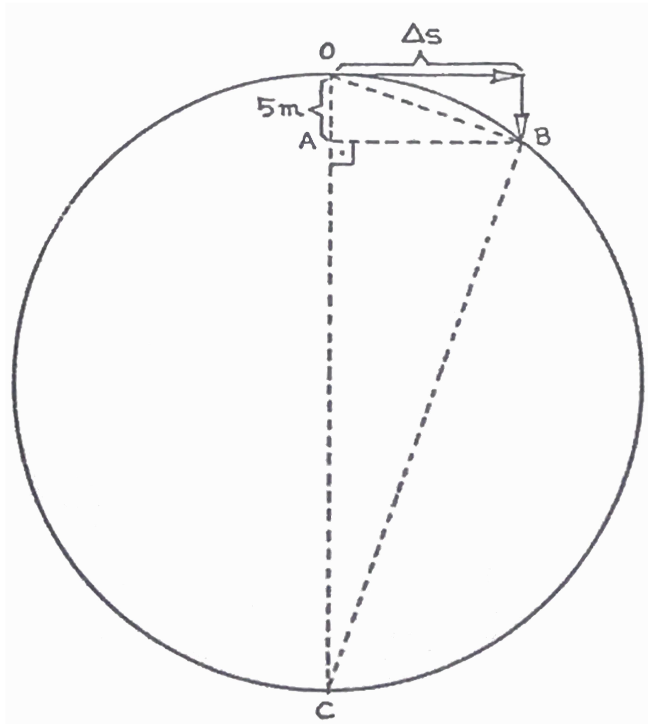
A partir do repouso qualquer corpo livre cai 5 m (aproximadamente) no primeiro segundo[13]. A Terra é redonda. Para que o satélite não se aproxime nem se afaste do chão ele deve andar em um segundo uma distância $\triangle s$ tal que o próprio chão (ou o mar) fique 5 m mais baixo em relação a um plano horizontal na origem O.



[12]Mais corretamente a distância ao centro vale 6 378 km no Equador e 6 357 km nos polos.

[13]A informação de que a aceleração da gravidade é 10 m/s (aproximadamente) está contida nesta distância (vertical) percorrida no primeiro segundo.

Tracemos um diâmetro da Terra que passa pela origem. Os dois triângulos $\triangle$OAB e $\triangle$BAC da figura abaixo são semelhantes porque possuem ângulos iguais[14].



Então

$$\frac{5\,\mathrm{m}}{\triangle s} = \frac{\triangle s}{2\,.\,\text{raio da Terra} - 5\,\mathrm{m}}$$

$$\triangle s \cong 8\,000\,\mathrm{m}$$

a serem percorridos em um segundo, ou seja,

$$v \cong 8\,\mathrm{km/s}\ .$$

Um fenômemo que se repete regularmente é denominado *fenômeno periódico*. Cada conjunto completo de acontecimentos que se repete é denominado *ciclo*. *Período* (T) é o tempo necessário para ocorrer um ciclo. O inverso do período $\frac{1}{T}$ é denominado *frequência*. É o número de ciclos que ocorre numa unidade de tempo.

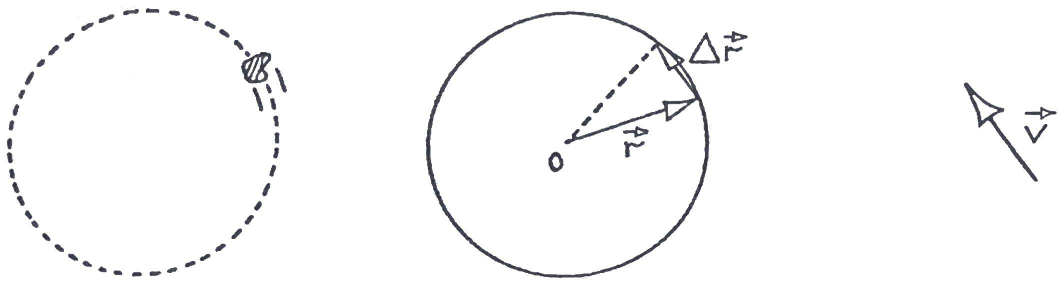
O movimento de um satélite ao redor da Terra é um exemplo de fenômeno periódico. O período do satélite estudado no último problema, por exemplo, é 5 000 s, ou 1 hora, 23 minutos e 20 segundos (o valor aproximado da circunferência da Terra é 40 000 km, percorridos com a velocidade de 8 km/s). A frequência do movimento é $\frac{1}{5000}$ voltas por segundo ou 0,72 voltas por hora.

Nota. A unidade de frequência ciclos/s é também chamada *hertz* (em menção a Heinrich Hertz 1857-1894 que descobriu as ondas de rádio).

[14] Os ângulos $\widehat{\mathrm{ABO}}$ e $\widehat{\mathrm{ACB}}$ são iguais porque possuem os lados respectivamente perpendiculares. O ângulo $\widehat{\mathrm{OBC}}$ é reto porque está inscrito em uma semicircunferência.

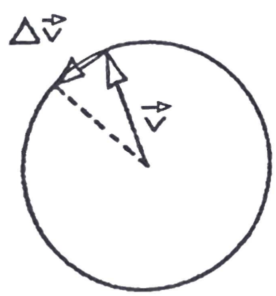
Descrição do Movimento Circular; Aceleração Centrípeta

Num movimento circular geralmente adotamos como origem (O) das posições ($\vec{r}$) o centro do círculo. Podemos descrever o movimento por intermédio de flechas.

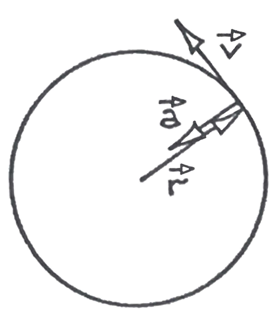


Desenhemos as várias flechas representativas das velocidades todas com a mesma origem (trata-se de um espaço das velocidades) e analisemos três casos.

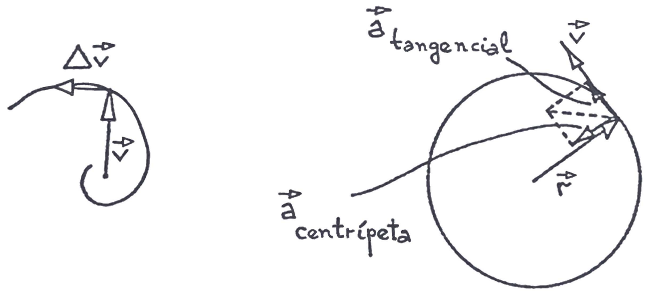
1.°) *Movimento Circular Uniforme*. Neste caso o módulo da velocidade é constante e a flecha representativa da velocidade desenha um círculo no espaço das velocidades.



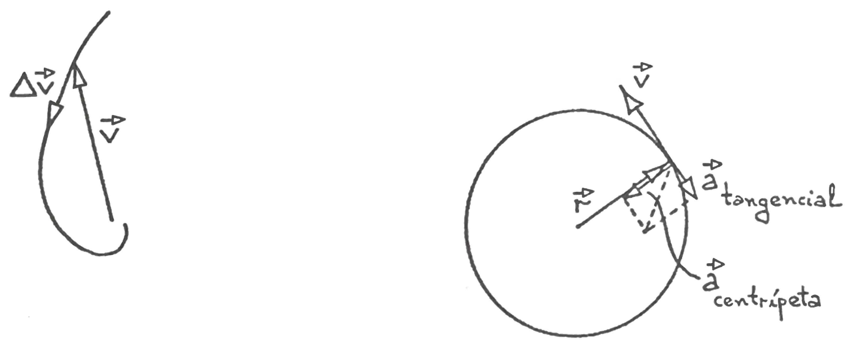
A aceleração tem a direção do vetor posição e aponta para o centro da circunferência (*aceleração centrípeta*). Os três vetores do movimento circular uniforme num instante são por exemplo como na figura.



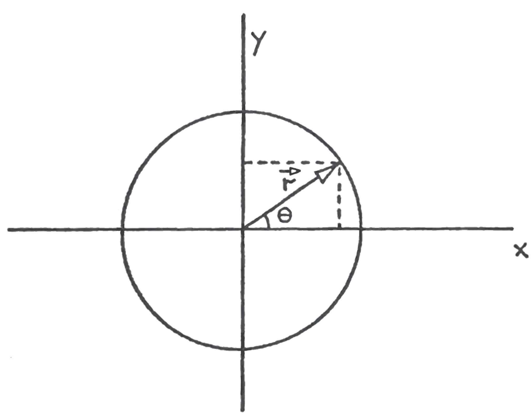
2.°) *Movimento Circular Acelerado*. A velocidade aumenta em módulo e a flecha representativa da velocidade desenha uma espiral crescente no espaço das velocidades. A aceleração possui, além do componente centrípeto, um componente tangencial com o mesmo sentido da velocidade.



3.º) *Movimento Circular Retardado.* A velocidade diminui em módulo e a flecha representativa da velocidade desenha uma espiral decrescente no espaço das velocidades. A aceleração possui um componente centrípeto e um componente tangencial com sentido contrário à velocidade.



Podemos por outro lado descrever o movimento circular por intermédio de projeções. Desenhemos um sistema de dois eixos ortogonais x e y com origem no centro do círculo.



Teremos

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\ \hat{x} + y\ \hat{y} \\ &= r\ \cos\theta \,.\, \hat{x} + r\ \mathrm{sen}\theta \,.\, \hat{y} \quad . \end{aligned}$$

O ângulo θ que o vetor posição forma com o eixo x varia com o tempo. Definimos *módulo da velocidade angular* (ω) como a derivada desse ângulo em relação ao tempo. No caso do movimento circular uniforme a velocidade angular é constante, $\theta = \omega t + \theta_0$, onde θ_0 é o ângulo inicial; a frequência do movimento é ω dividido por 360 graus, ou 2π radianos

$\left(\text{freq.} = \frac{\omega}{360°} = \frac{\omega}{2\pi\text{radianos}}\right)$[15]. A posição pode ser escrita como

$$r\,\cos\left(\omega t + \theta_0\right).\,\hat{x} + r\,\operatorname{sen}(\omega t + \theta_0).\,\hat{y} \quad .$$

Devemos derivar esta expressão para obter velocidade e aceleração do movimento circular uniforme. Para tanto é necessário saber que

$$\frac{d\,\operatorname{sen}\theta}{d\theta} = \cos\theta\,, \qquad \frac{d\cos\theta}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

onde $y = y(u)$ e $u = u(x)$, relações que deixamos sem demonstração sendo assunto dos livros elementares de cálculo (a terceira igualdade é conhecida como *regra da cadeia*). Teremos

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= -\,\omega\,r\,\operatorname{sen}\left(\omega t + \theta_0\right).\,\hat{x} + \omega\,r\,\cos(\omega t + \theta_0).\,\hat{y} \\
\vec{a} &= -\,\omega^2\,r\,\cos\left(\omega t + \theta_0\right).\,\hat{x} - \omega^2\,r\,\operatorname{sen}(\omega t + \theta_0).\,\hat{y} \\
&= -\,\omega^2\left[\,r\,\cos\left(\omega t + \theta_0\right).\,\hat{x} + r\,\operatorname{sen}(\omega t + \theta_0).\,\hat{y}\,\right] \quad .
\end{aligned}$$

Daí se tem a aceleração em função da posição e da velocidade angular.

$$\boxed{\vec{a} = -\,\omega^2\,\vec{r}} \quad .$$

Em palavras, num movimento circular uniforme a aceleração tem a mesma direção e sentido contrário que o vetor posição (a aceleração é centrípeta). No caso de um movimento curvo qualquer[16] a expressão acima continua válida para o componente centrípeto da aceleração, considerando a velocidade angular instantânea.

Por outro lado, com respeito ao módulo da velocidade tem-se

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\
&= \sqrt{\omega^2\,r^2\,\operatorname{sen}^2\left(\omega t + \theta_0\right) + \omega^2\,r^2\,\operatorname{sen}^2\left(\omega t + \theta_0\right)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{v = \omega\,r}$$

(é a relação entre a velocidade do corpo e sua velocidade angular).

E se substituirmos $\omega = \frac{v}{r}$ na expressão anterior teremos

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\,\hat{r}$$

ou em módulo,

$$\boxed{a = \frac{v^2}{r}} \quad .$$

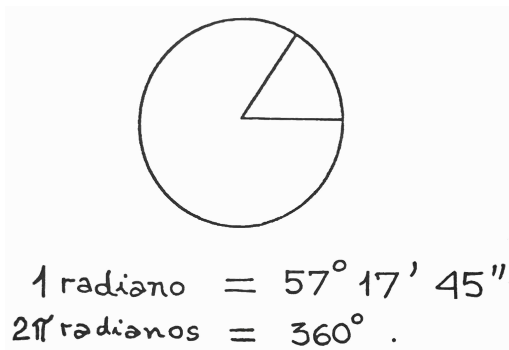
[15]O *grau* é a volta completa dividida por 360. *Grado* é a volta dividida por 400. O *radiano* encontra-se definido à página 46. A velocidade angular, que é o número de graus (grados, radianos) descritos por segundo, é igual ao número de voltas descritas num segundo (frequência) multiplicado pelo número de graus (grados, radianos) que existe numa volta.

[16]Uma trajetória curva é, em cada trecho suficientemente pequeno, igual a um arco de circunferência, e possui portanto, para cada um desses trechos, um centro de curvatura e um raio de curvatura.

Como exemplo resolvamos novamente o problema 15 página 41 aplicando esta fórmula.

$$\begin{aligned} 10\,\mathrm{m/s^2} &= \frac{v^2}{6,5\,.\,10^6\,\mathrm{m}} \\ v &= 8\,\mathrm{km/s}\ . \end{aligned}$$

Ao se efetuar derivações de funções trigonométricas, como fizemos nesta seção, obtém-se expressões nas quais aparecem ângulos multiplicados por outras grandezas. Pode-se escrever os ângulos utilizando qualquer unidade de ângulo, mas é então necessário incluir um fator multiplicativo conforme a unidade utilizada. Há contudo aquela unidade de ângulo especialmente conveniente—o *radiano*—que prescinde de fator (ou seja, com fator 1). Um *radiano* (rad) é o ângulo que possui arco de mesmo comprimento que o raio.



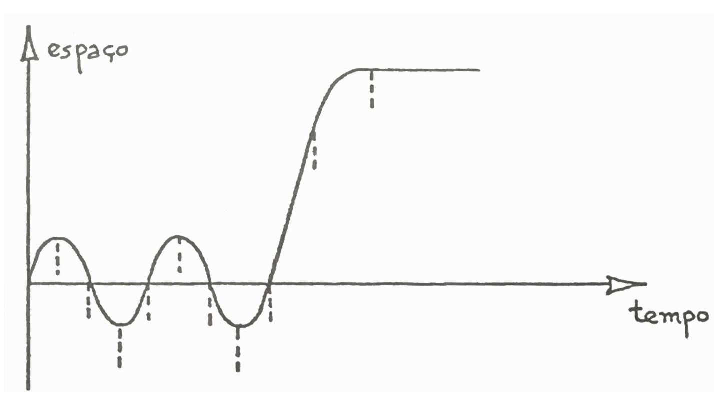
Para se medir um ângulo em radianos mede-se arco e raio e divide-se um pelo outro,

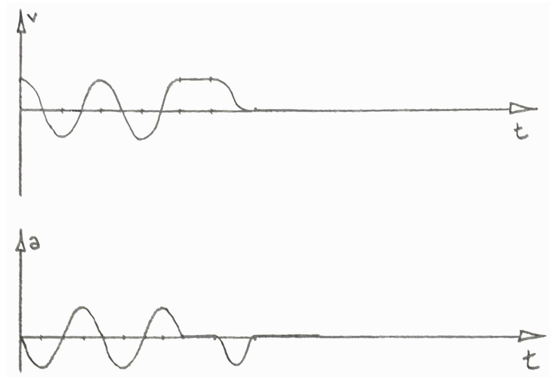
$$\theta_{(\text{em radianos})} = \frac{\text{arco}}{\text{raio}}\ .$$

Com ângulos expressos em radianos pode-se utilizar imediatamente as fórmulas que envolvem multiplicações ou divisões por ângulos sem quaisquer outros fatores multiplicativos.

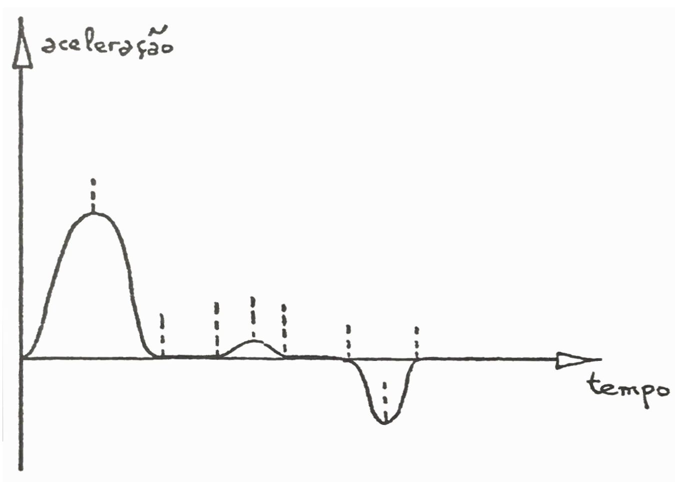
Cinco problemas propostos

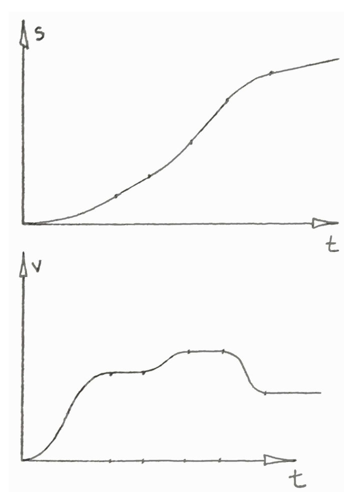
1 - Dado o seguinte gráfico espaço×tempo esboce qualitativamente os gráficos velocidade×tempo e aceleração×tempo correspondentes.





2 - Dado o seguinte gráfico aceleração×tempo esboce os gráficos velocidade×tempo e aceleração×tempo correspondentes (considere $v_0 = 0$ e $s_0 = 0$).





3 - Um foguete sobe verticalmente—a partir do repouso—com uma aceleração de $20\,\mathrm{m/s^2}$ durante um minuto. Seu combustível é então totalmente consumido e ele continua livre (com aceleração da gravidade; $|\vec{g}| = 10\,\mathrm{m/s^2}$). Calcule a altitude máxima que atingirá (despreze a resistência do ar). 108 000 m.

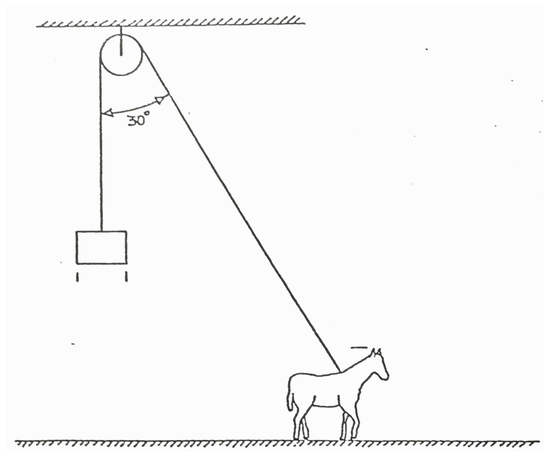
4 - Um projétil é lançado a partir do solo obliquamente segundo um ângulo θ formado com a horizontal. A velocidade inicial é v_0 e a aceleração da gravidade é $\vec{g}$. Pede-se (em função de θ, v_0 e g)

o tempo de voo,

o alcance e

o ângulo de lançamento para o qual o alcance é máximo. $\frac{2v_0 \mathrm{sen}\theta}{g}$; $\frac{v_0^2}{g}\mathrm{sen}2\theta$; $45°$.

5 - Um cavalo anda sobre um piso horizontal com velocidade $2\,\mathrm{m/s}$ e suspende um fardo por meio de uma corda que passa por uma polia (ver figura). Calcule a velocidade do fardo no momento em que a corda amarrada ao cavalo forma um ângulo de $30°$ com a vertical. $1\,\mathrm{m/s}$.



Capítulo 3

Quantidade de Movimento

No capítulo anterior estudamos descrições dos movimentos sem nos preocuparmos com as regularidades e propriedades que existem nos movimentos que observamos na natureza. Veremos agora uma lei fundamental dos movimentos dos corpos, a *conservação da quantidade de movimento*. Esta lei tem sido sempre (universalmente) verificada nas observações e ela será para nós um postulado a partir do qual analisaremos diferentes situações específicas.

3.1 Conservação da Quantidade de Movimento

Podemos afastar progressivamente um corpo das proximidades de outros corpos de modo que o movimento desse corpo seja cada vez menos influenciado pelos outros corpos. Admitimos que existe um afastamento suficientemente grande a partir do qual não haverá qualquer influência sobre o movimento, e a um corpo nessa situação damos o nome de *corpo isolado*. Nessa situação, e com relação a um referencial[17] preso a um segundo corpo que também esteja isolado (e que não gira)[18] a aceleração do corpo é nula, ou seja, ele está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme[19].

Esta é a *Lei da Inércia*, também conhecida como *Primeira Lei de Newton*. Vamos repetir,

> *O movimento de um corpo isolado em relação a um referencial inercial é retilíneo uniforme (ou, caso particular, o corpo permanece em repouso).*

Inércia é a propriedade que possui todo corpo de se opor a modificações de sua velocidade em relação a um referencial inercial. A lei da inércia afirma o fato universal e quotidianamente verificado de que os corpos, quaisquer que sejam, não mudam, e não iniciam ou cessam, seus movimentos sem que outro(s) corpo(s) interaja(m) com eles.

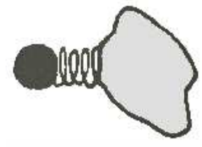
Façamos um experiência elementar de interação. Coloquemos uma mola comprimida entre dois corpos isolados, inicialmente em repouso, conforme ilustra a figura. É um *sistema isolado*, com interação(ões) apenas entre os corpos que o compõem, os quais na ausência dessa(s) interação(ões) interna(s) se comportariam cada um como corpo isolado.

---

[17] O conceito de referencial foi introduzido à página 14.

[18] A um referencial assim damos o nome de *referencial inercial*.

[19] Estamos considerando um corpo suficientemente pequeno comparado com os deslocamentos que realiza de modo que podemos desprezar suas dimensões e seus movimentos de rotação. Em outras palavras, podemos tratar o corpo como sendo partícula (ver página 19). Neste e nos próximos dois capítulos sempre que for utilizada a palavra *corpo* deve-se entender como sendo uma partícula.



A mola foi colocada com o objetivo de afastar os corpos. Ao final de um intervalo de tempo teremos a situação da próxima figura (por simplicidade suponhamos que a mola fica presa a um dos corpos).

Observa-se experimentalmente que a relação entre os deslocamentos $|\triangle\vec{r}_1|$ e $|\triangle\vec{r}_2|$ a partir da posição inicial (e também a relação entre as velocidades) depende apenas dos corpos. Em outras palavras, para cada dois corpos que interagem a partir do repouso existe um único valor para a relação entre os deslocamentos[20].

Este fato conduz à definição de uma grandeza física que denominaremos *massa inercial* (m_{inercial}) de um corpo. Escolhamos inicialmente um corpo qualquer e convencionemos que este possui massa inercial unitária. Então a massa inercial de qualquer outro corpo será obtida por intermédio de um experimento semelhante ao que descrevemos, no qual interagem o corpo em questão e o corpo de massa unitária. Da relação entre os deslocamentos (em módulo) obtém-se a massa inercial.

$$m_{\text{inercial do corpo}} = \frac{|\triangle\vec{r}_{\text{unidade}}|}{|\triangle\vec{r}_{\text{corpo}}|} \text{ unidades de massa inercial .}$$

Por exemplo, se o delocamento da unidade for 20 cm quando o deslocamento do corpo é 5 cm tem-se $m_{\text{inercial do corpo}} = \frac{20}{5} = 4$ unidades de massa inercial .

O experimento pode ser realizado em qualquer direção e sentido do espaço e os resultados, dentro da precisão experimental, são independentes da direção e sentido. Ademais, quando se realiza o experimento com dois corpos que tiveram suas massas inerciais determinadas previamente (por meio de interação com um terceiro corpo) observa-se que a relação entre os deslocamentos é a relação (inversa) entre as massas. Este fato, verificado, é necessário para se ter unicidade na definição da massa inercial de um corpo, não dependendo em princípio de qual seja o outro corpo com o qual ele venha a interagir.

As unidades de massa inercial mais utilizadas são o *quilograma* (kg) e o *grama* (g). A definição de quilograma encontra-se na página 2. Uma *tonelada* é igual a 1000 kg.

[20]Rigorosamente isto não é verdadeiro e o que afirmamos foi por razões didáticas. Existe uma ressalva de caráter fundamental a esta afirmação que está comentada à página 60.

A definição da grandeza massa inercial permite que se defina outra grandeza, que chamamos *quantidade de movimento* ($\vec{p}$) ou *momento linear*, de um conjunto de corpos. A quantidade de movimento é a soma dos produtos *massa inercial*$\times$*velocidade* dos corpos (N corpos),

$$\sum_{i=1}^{N} m_{\text{inercial}\,i} \cdot \vec{v}_i \quad .$$

Trata-se de uma grandeza vetorial. Ela é uma constante de movimento de um sistema isolado. Em outras palavras, é uma grandeza conservada (que não varia) enquanto o movimento do sistema acontece. Por exemplo, em nosso experimento de interação simples temos

$$\begin{aligned} m_{\text{inercial}_2} \cdot \triangle\vec{r}_2 &= -\, m_{\text{inercial}_1} \cdot \triangle\vec{r}_1 \\ m_{\text{inercial}_1} \cdot \triangle\vec{r}_1 + m_{\text{inercial}_2} \cdot \triangle\vec{r}_2 &= \vec{0} \end{aligned}$$

onde $\vec{0}$ é o vetor nulo. Dividindo pelo intervalo de tempo tem-se

$$m_{\text{inercial}_1} \cdot \vec{v}_1 + m_{\text{inercial}_2} \cdot \vec{v}_2 = \vec{0} \ ,$$

ou seja, o movimento ocorre de tal modo que a quantidade de movimento final $m_{\text{inercial}_2} \cdot \vec{v}_2 + m_{\text{inercial}_1} \cdot \vec{v}_1$ é igual à quantidade que havia no início (no caso nula, pois os corpos estavam parados).

É a *Conservação da Quantidade de Movimento. Num sistema isolado a quantidade de movimento em qualquer instante é igual à quantidade de movimento inicial.*

$$\boxed{\vec{p}_{\text{final}} = \vec{p}_{\text{inicial}}}$$

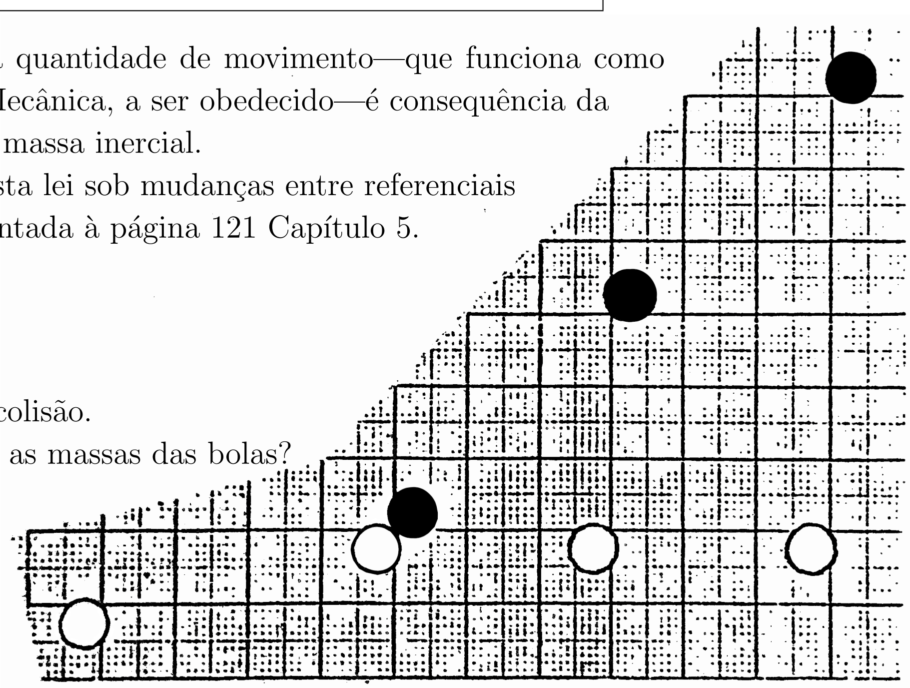
$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_{\text{inercial}\,i} \cdot \vec{v}_{\text{final}\,i} = \sum_{i=1}^{N} m_{\text{inercial}\,i} \cdot \vec{v}_{\text{inicial}\,i}} \quad .$$

A conservação da quantidade de movimento—que funciona como um princípio para a Mecânica, a ser obedecido—é consequência da definição da grandeza massa inercial.

A preservação desta lei sob mudanças entre referenciais inerciais estará apresentada à página 121 Capítulo 5.

Problema 16

A figura mostra uma colisão.
Qual é a relação entre as massas das bolas?



A figura representa uma fotografia estroboscópica, obtida por exposições sucessivas em intervalos de tempo regulares na mesma tela. Trata-se pois, na verdade, de várias fotografias superpostas. No nosso caso temos duas bolas, uma branca e uma preta, fotografadas quatro vezes. Por coincidência, ou por intenção, uma das fotografias foi tirada no instante em que as duas bolas se tocaram. Provavelmente a bola preta estava parada e foi atingida a partir da esquerda pela bola branca[21].

A conservação da quantidade de movimento deve valer em qualquer direção. No eixo x por exemplo[22] temos

$$\begin{aligned} p_{x_{\text{final}}} &= p_{x_{\text{inicial}}} \\ m_{\text{branca}} \cdot \frac{3}{\cancel{\Delta t}} + m_{\text{preta}} \cdot \frac{3}{\cancel{\Delta t}} &= m_{\text{branca}} \cdot \frac{4}{\cancel{\Delta t}} \end{aligned}$$

onde os deslocamentos 3, 3 e 4 unidades foram obtidos da fotografia.

$$\frac{m_{\text{branca}}}{m_{\text{preta}}} = 3 \ .$$

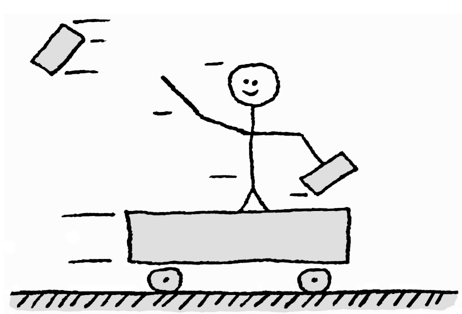
Se raciocinarmos do mesmo modo para o eixo perpendicular y (ou em qualquer outra direção) obteremos o mesmo resultado. De fato

$$\begin{aligned} p_{y_{\text{final}}} &= p_{y_{\text{inicial}}} \\ m_{\text{preta}} \,.\, 3 &= m_{\text{branca}} \,.\, 1 \end{aligned}$$

(a bola branca após a colisão não se desloca na direção y)

$$\frac{m_{\text{branca}}}{m_{\text{preta}}} = 3 \ .$$

Problema 17



Um garoto de massa 40 kg, carregando dois tijolos de 5 kg cada um, está sobre um carrinho de massa 10 kg inicialmente parado sobre um plano horizontal de atrito desprezível. O garoto lança então os tijolos horizontalmente no mesmo sentido um de cada vez, com a velocidade 5,7 m/s em relação ao carrinho.

Calcule a velocidade final do carrinho.

A velocidade final (v_{final}) será atingida após o lançamento do segundo tijolo. Neste

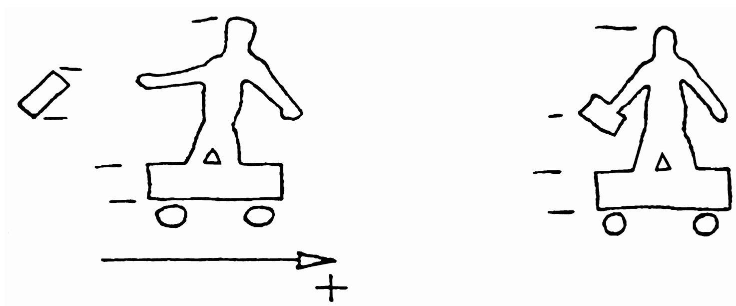
[21] Existe ainda a possibilidade (remota) de que as duas bolas tenham vindo a partir da direita e se chocaram de tal modo que a bola preta resultou parada.

[22] Paralelo às linhas da página. Doravante, a menos de citação em contrário, chamaremos por convenção *eixo x* aquele paralelo às linhas da página, e *eixo y* um eixo perpendicular ao eixo x.

segundo lançamento temos

$$p_{\,\text{final}} = p_{\,\text{inicial}} \quad .$$

Orientemos o eixo com sentido positivo para a direita da página; consideremos que o garoto lançou os tijolos para a esquerda.



Com relação a um referencial fixo no chão teremos

$$(m_{\,\text{garoto}} + m_{\,\text{carrinho}})\,v_{\,\text{final}} + m_{\,\text{tijolo}}\,(-5,7 + v_{\,\text{final}}) = (m_{\,\text{garoto}} + m_{\,\text{carrinho}} + m_{\,\text{tijolo}})\,v_1$$

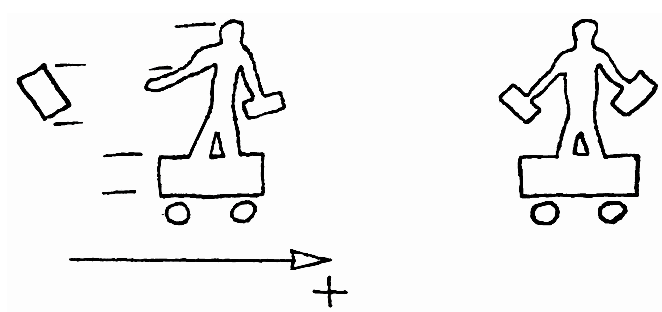
onde v_1 é a velocidade adquirida pelo carrinho após o lançamento do primeiro tijolo.

$$50\,v_{\,\text{final}} + 5\,(-5,7 + v_{\,\text{final}}) = 55\,v_1$$

$$v_{\,\text{final}} = 0,52 + v_1$$

Calculemos v_1. Consideremos o lançamento do primeiro tijolo.

$$p_{\,\text{final}} = p_{\,\text{inicial}}$$



$$(m_{\,\text{garoto}} + m_{\,\text{carrinho}} + m_{\,\text{tijolo}})\,v_1 + m_{\,\text{tijolo}}\,(-5,7 + v_1) = 0$$

$$v_1 = 0{,}48\,\text{m/s}$$

$$v_{\,\text{final}} = 1\,\text{m/s}\ .$$

3.2 Centro de Massa

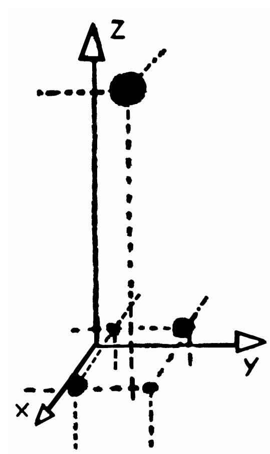
Ainda como consequência da definição de massa inercial podemos conceituar para cada conjunto de corpos um ponto chamado *centro de massa* com algumas propriedades (veja-se páginas 54 e 62). A posição do centro de massa ($\vec{r}_{\text{c.m.}}$) é a média das posições $\vec{r}_i$ dos vários corpos (N corpos) que compõem o sistema, ponderadas por suas respectivas massas,

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}$$

ou, no caso de um sistema contínuo,

$$\frac{\int\limits_{\text{todo o sistema}} \vec{r} \, dm}{\int\limits_{\text{todo o sistema}} dm} \quad .$$

Por exemplo, um sistema constituído de dois corpos de mass M nas posições (1,1,1) m e (3,3,1) m, dois corpos de massa $2M$ nas posições (3,1,1) m e (1,3,1) m e um corpo de massa $24M$ na posição (2,2,6) m tem centro de massa em (2,2,5) m.



O cãlculo da projeção x é

$$\begin{aligned} x_{\text{c.m.}} &= \frac{M.1 + M.3 + 2M.3 + 2M.1 + 24M.2}{M + M + 2M + 2M + 24M} \\ &= 2\,m \end{aligned}$$

e análogo nos outros eixos.

O centro de massa de um sistema isolado realiza movimento retilíneo uniforme. De fato, a velocidade do centro de massa em qualquer instante é

$$\frac{d}{dt} \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}_{\text{final}_i}}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}$$

ou

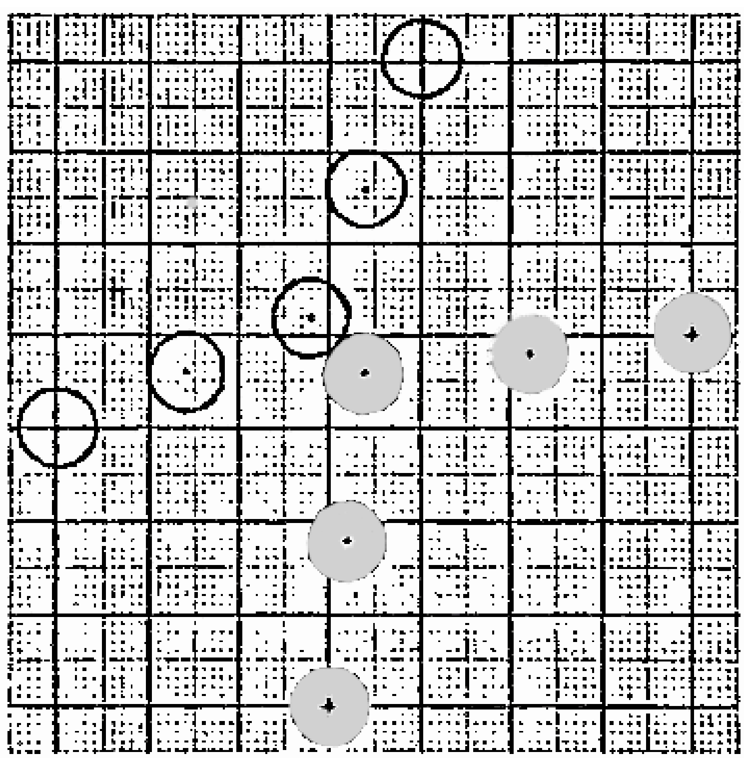
$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_{\text{final}_i}}{dt}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

que pela conservação da quantidade de movimento (página 51) é

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_{\text{inicial}_i}}{dt}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

ou seja, a velocidade inicial do centro de massa. Em outras palavras, a velocidade do centro de massa de um sistema isolado é constante.

Problema 18



A figura mostra a fotografia estroboscópica de uma colisão. Desenhe a trajetória do centro de massa do sistema.

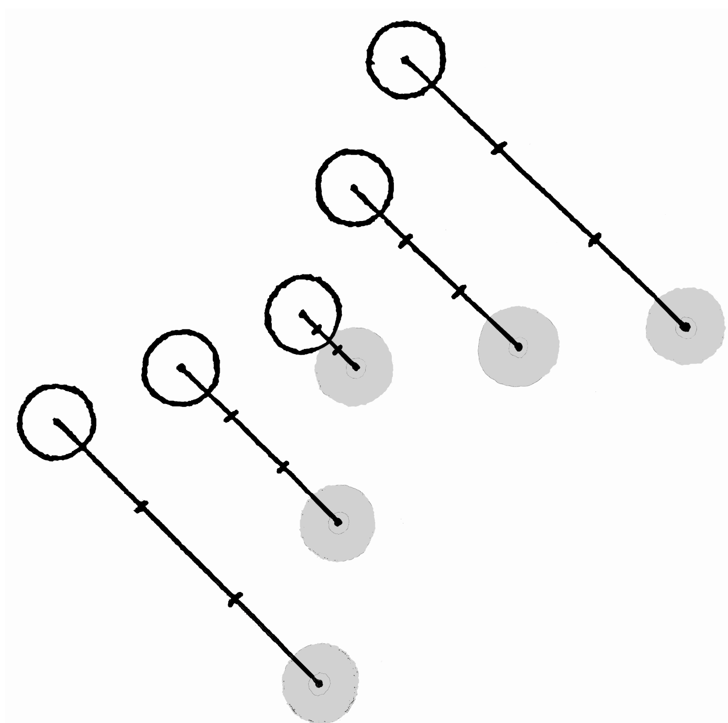
A figura nos mostra cinco instantes consecutivos de um sistema de duas bolas, uma clara e uma escura (explicação sobre fotografias estroboscópicas encontra-se à página 52). Há quatro possibilidades de haver ocorrido a colisão; as duas bolas vieram da esquerda para a direita (e de baixo para cima da página), as duas vieram da direita, a clara veio da esquerda e a escura da direita, e a clara veio de cima e a escura de baixo. Consideraremos inicialmente as duas primeiras possibilidades.

Em cada instante o centro de massa se encontra na linha que liga as duas bolas, numa posição determinada do seguinte modo; sendo m_1 e m_2 as massas das bolas. divide-se a distância entre seus centros em $m_1 + m_2$ partes e toma-se m_2 partes do lado da bola 1 (ou m_1 partes do lado da bola 2)[23].

É necessária a relação entre as massas das bolas. No eixo x por exemplo temos

$$
\begin{aligned}
p_{x_{\text{final}}} &= p_{x_{\text{inicial}}} \\
m_{\text{clara}} \cdot \frac{6}{\triangle t} + m_{\text{escura}} \cdot \frac{18}{\triangle t} &= m_{\text{clara}} \cdot \frac{14}{\triangle t} + m_{\text{escura}} \cdot \frac{2}{\triangle t} \\
\frac{m_{\text{clara}}}{m_{\text{escura}}} &= \frac{2}{1} \quad .
\end{aligned}
$$

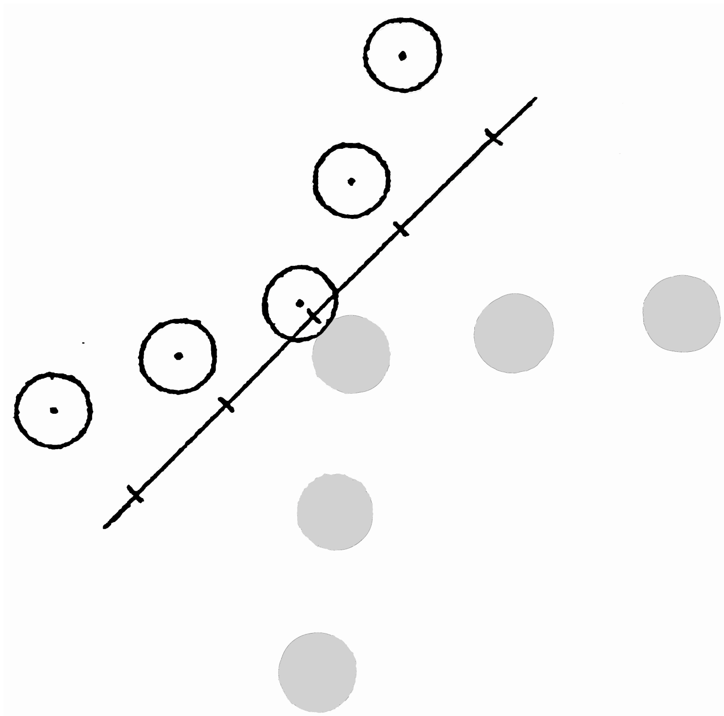
Em cada instante dividimos a distância que separa os centros das bolas em três partes.



[23]Esta regra é consequência da definição de centro de massa. Tomando como origem das distâncias a posição (do centro de massa) de um dos corpos, a posição do centro de massa do sistema (constituído de dois corpos) é $[m_2/(m_1+m_2)]\triangle l$, onde $\triangle l$ é a distância entre os (centros de massa dos) dois corpos. A distância do centro de massa do sistema até o (centro de massa do) outro corpo é

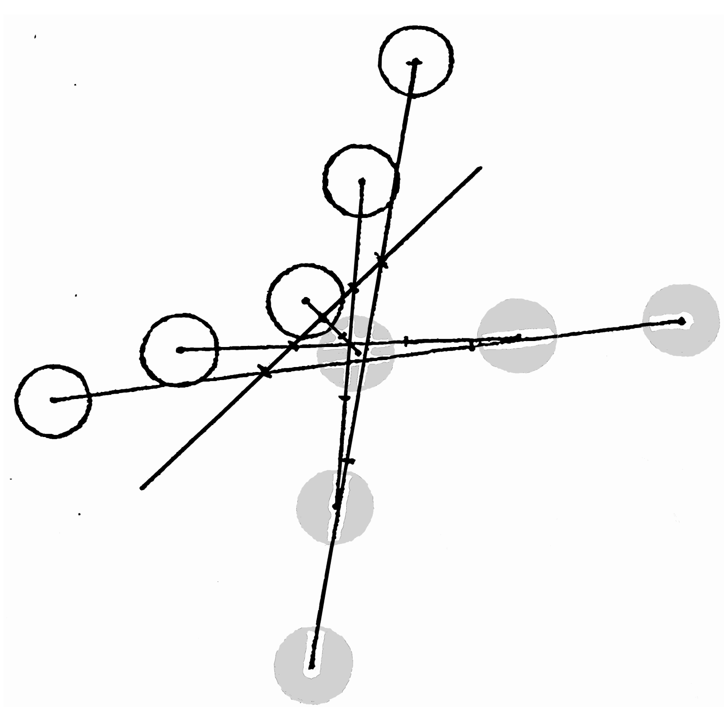
$$\triangle l - \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\triangle l = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\triangle l \quad .$$

Toma-se então, em cada instante, uma parte junto à bola clara (ou duas junto à bola escura).



O centro de massa percorre espaços iguais em tempos iguais numa trajetória retilínea, o que é consequência do fato do sistema estar isolado.

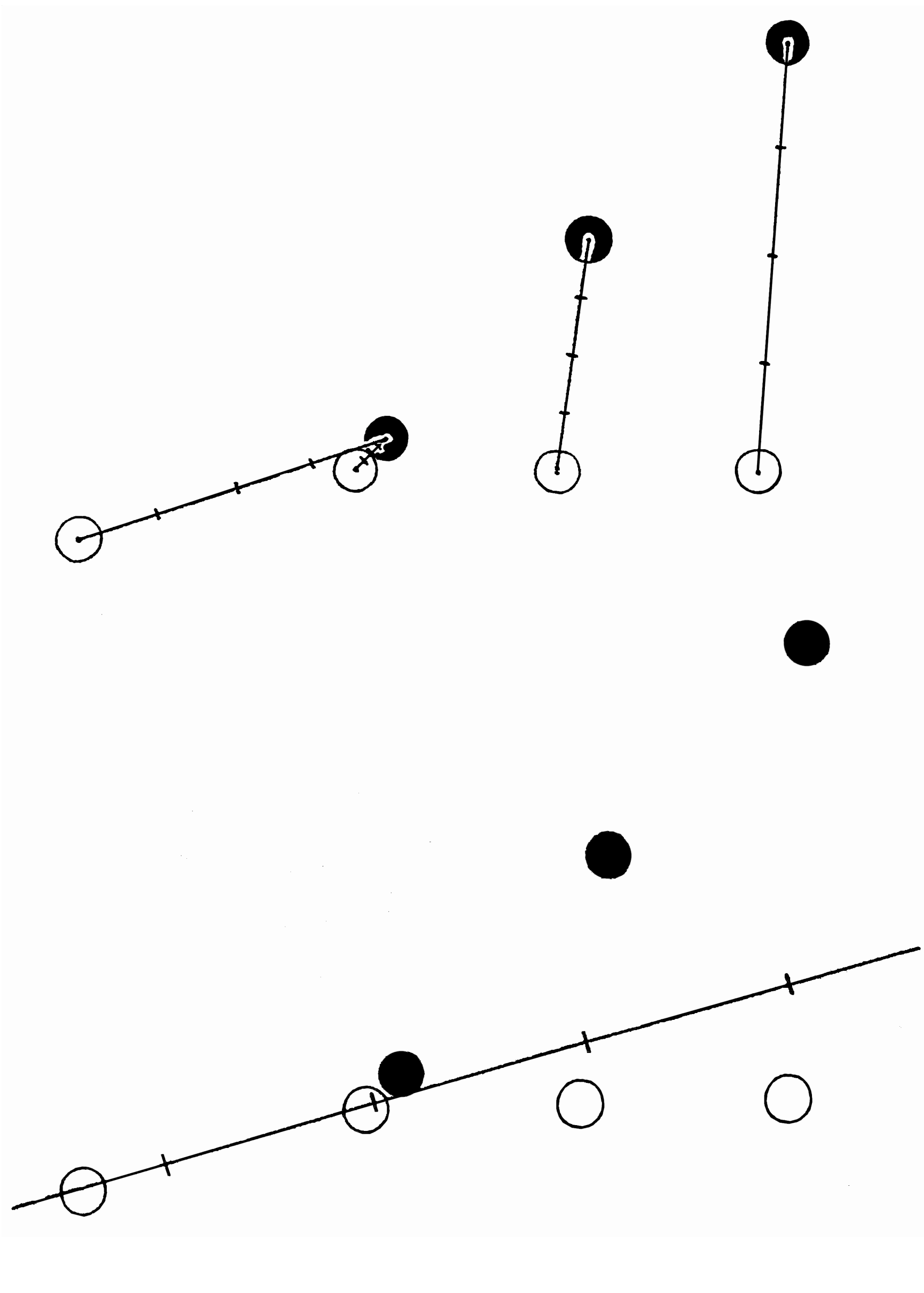
Nota. Há ainda duas possibilidades, nas quais as duas bolas estariam vindo de lados opostos da figura. A seguir tem-se as posições e a trajetória do centro de massa nesses casos.



Problema 19

Desenhe a trajetória do centro de massa da colisão descrita no problema 16 (página 51).

A relação entre as massas é 3 para 1 já calculada naquele problema. Dividimos em cada instante a distância entre os centros das duas bolas em quatro partes e tomamos uma do lado da bola clara.



O movimento do centro de massa é retilíneo uniforme.

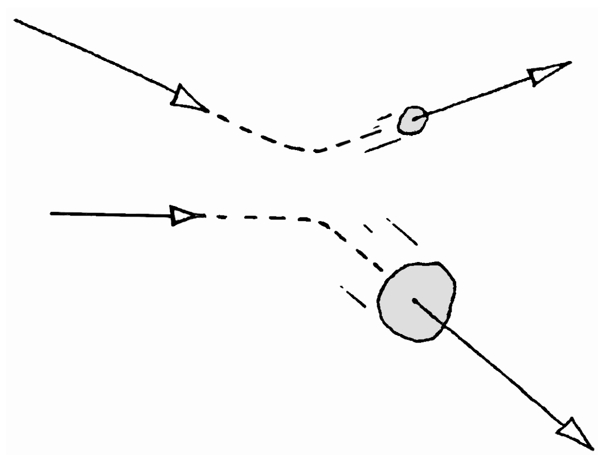
3.3 Força

Na seção **3.1** aprendemos que a quantidade de movimento de um sistema isolado é conservada. Então a quantidade de movimento de um corpo só mudará se trocar quantidade de movimento com outro corpo. Esta é a *Lei da Ação e Reação*, também conhecida como *Terceira Lei de Newton*. Em palavras,

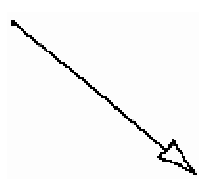
> *Numa colisão entre dois corpos que constituem um sistema isolado a quantidade de movimento recebida por um dos corpos é fornecida pelo outro.*

Isaac Newton enunciou a lei em termos do conceito de *força*, forma em que é mais conhecida (veja-se à página 60)[24].

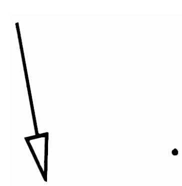
Consideremos a colisão representada na figura.



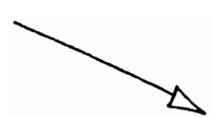
As flechas representam as quantidades de movimento. O corpo desenhado mais abaixo, o maior, recebeu uma quantidade

 menos 

que é

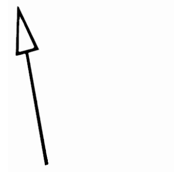


Esta quantidade foi fornecida pelo outro corpo. A variação da quantidade de movimento do outro corpo foi

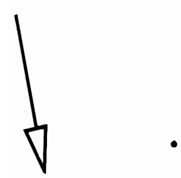
 menos 

[24]As demais leis de Newton encontram-se às páginas 49 e 63

que é



o que é o mesmo que dizer que este outro corpo perdeu uma quantidade de movimento representada pela flecha



Neste processo a quantidade de movimento do conjunto é conservada. Assim, a lei da ação e reação pode ser deduzida da conservação da quantidade de movimento (ou vice-versa, a conservação da quantidade de movimento pode ser deduzida da lei da ação e reação).

Força—aplicada sobre um corpo num certo instante—é a variação da quantidade de movimento do corpo por unidade de tempo, nesse instante,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \ ,$$

ou seja, a quantidade transferida por unidade de tempo. Em termos de forças a lei da ação e reação pode ser assim enunciada,

> *Quando um corpo aplica sobre outro uma força—denominada 'ação'—o segundo corpo aplica sobre o primeiro outra força—denominada 'reação'—de mesmo módulo e direção, e sentido contrário.*

Consideraremos neste texto apenas a situação simplificada e mais comumente estudada em que os corpos apresentam massas constantes, enquanto interagem. Nesse caso a força é o produto *massa* × *aceleração*,

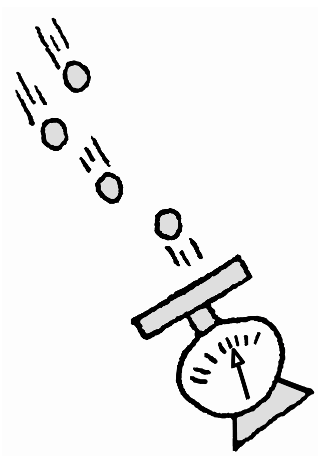
$$\frac{d\,m\vec{v}}{dt} \;=\; m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \;=\; m\,.\,\vec{a} \quad .$$

Comentário.

Existe uma ressalva, de caráter fundamental, à afirmação à página 50 de que numa interação a partir do repouso a relação entre os deslocamentos depende apenas dos dois corpos; isto não é verdadeiro quando os corpos se movem com velocidades comparáveis à da luz (aproximadamente 300.000 km/s). Nesse caso a relação entre os deslocamentos depende também das velocidades. E como a grandeza massa inercial é definida por intermédio desses deslocamentos tem-se que a massa varia com a velocidade. Observa-se que é cada vez mais difícil acelerar um corpo à medida que sua velocidade se aproxima da velocidade da luz. Isto é observado no movimento de partículas elementares da matéria, que eventualmente possuem grande quantidade de movimento embora caminhem com *velocidades inferiores à da luz. Pode-se deduzir uma relação entre a massa e a velocidade a partir da hipótese de que as leis do Eletromagnetismo (chamadas 'equações de Maxwell') valem em todos os referenciais inerciais, e impondo-se a conservação da quantidade de movimento. Este assunto é objeto da 'Teoria da Relatividade' à qual não nos dedicaremos aqui. No presente texto nos restringiremos às situações em que as massas dos corpos possam ser consideradas invariáveis, o que é válido nos casos em que as velocidades são pequenas quando comparadas com a velocidade da luz.*

A unidade de força no sistema mks é o *newton (N)*. Um newton imprime a um corpo de massa $1\,\mathrm{kg}$ uma aceleração de $1\,\mathrm{m/s^2}$ $(1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg}\,\frac{m}{s^2})$. No sistema cgs tem-se o *dina (dyn)*, igual a $1\,\mathrm{g}\,\frac{cm}{s^2}$. $1\,\mathrm{N} = 10^5\,\mathrm{dyn}$. Utiliza-se também o *quilograma-força*, abreviado *kgf* ou *kg**, que é o peso de um corpo de massa $1\,\mathrm{kg}$ ao nível do mar na latitude 45° norte $(1\,\mathrm{kgf} = 9{,}80665\,\mathrm{N})$. É unidade utilizada em aplicações práticas.

Problema 20

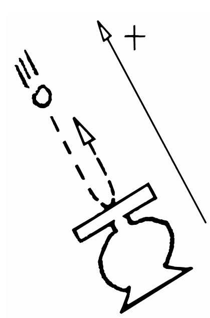


Partículas de massa $0{,}2\,\mathrm{kg}$ atingem perpendicularmente o prato de uma balança com velocidade $14\,\mathrm{m/s}$. As colisões são elásticas, ou seja, com relação à balança as partículas voltam com a mesma velocidade em módulo com que chegaram. Chocam-se 40 particulas por segundo com o prato. Qual é a força média que a balança indica?

A balança indica a força que ela exerce sobre os corpos. O próprio mecanismo da balança possui inércia, de modo que ela indica a força média.

$$\begin{aligned}\frac{\triangle p}{\triangle t} &= \frac{p_{\,\mathrm{final}} - p_{\,\mathrm{inicial}}}{\triangle t} \\ &= \frac{40\,(m\,v_{\mathrm{final}} - m\,v_{\mathrm{inicial}})}{1\,\mathrm{segundo}}\end{aligned}$$

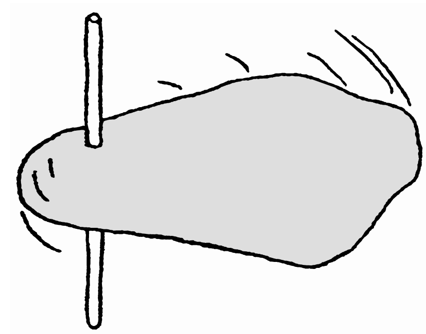
onde m é a massa de cada partícula. Orientemos como positivo o sentido que aponta para fora do prato da balança.



$$\begin{aligned}\frac{\triangle p}{\triangle t} &= 40\;.\;0,2\;.\;[14-(-14)] \\ &= 224\,\text{newtons}\,.\end{aligned}$$

Problema 21

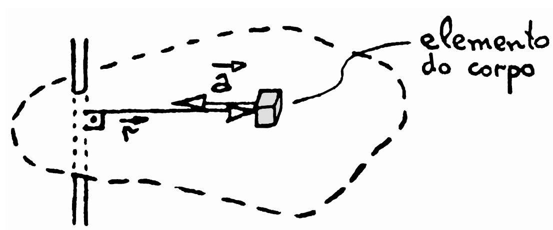
Um corpo de massa 10 kg gira ao redor de um eixo que não contém seu centro de massa (conforme a figura). A distância do centro de massa ao eixo é 1 m. A velocidade angular é 6 radianos por segundo. Calcule o módulo da força centrípeta que o eixo exerce sobre o corpo.



Tratando-se de um corpo extenso integremos as várias forças elementares,

$$\int_{\text{todo o corpo}} \vec{a}\,dm \quad ,$$

onde dm é a massa de cada elemento do corpo. A aceleração $\vec{a}$ de cada elemento é $-\omega^2\,\vec{r}$, onde $\vec{r}$ é um vetor perpendicular ao eixo com origem neste e extremidade no elemento.



$$\overrightarrow{\text{força}} = -\int_{\text{todo o corpo}} \omega^2\,\vec{r}\,dm \quad .$$

A velocidade angular é a mesma para todos porque o corpo é rígido,

$$= -\,\omega^2.\int_{\text{todo o corpo}} \vec{r}\,dm \quad .$$

Multiplicando-se e dividindo pela massa total m tem-se

$$\begin{aligned} &= -\,m\,\omega^2\,\frac{\int_{\text{todo o corpo}} \vec{r}\,dm}{m} \\ &= -\,m\,\omega^2\,\vec{r}_{\text{c.m.}}\ ,\end{aligned}$$

ou seja, a força sobre o corpo é a massa total vezes a aceleração do centro de massa[25].

$$\begin{aligned}\text{força (em módulo)} &= 10\,.\,6^2\,.\,1 \\ &= 360\,\text{N}\ .\end{aligned}$$

[25]Tal é válido para qualquer sistema. É uma propriedade do centro de massa. Para demonstrar aplica-se a igualdade 'a integral da derivada é a derivada da integral' a $\int \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,dm$.

3.4 Leis de Força

Os corpos ou sistemas de corpos do mundo físico se movem obedecendo a determinadas leis. Alguns desses sistemas possuem leis particularmente simples.

Uma *lei de movimento* é uma afirmação a respeito da posição, da velocidade ou da aceleração de um corpo. Na Física as leis mais notáveis tratam da aceleração, ou ainda, do produto massa $\times$ aceleração, ou força. Tais leis de movimento, *leis de força*, ou *equações de movimento*, possuem a forma geral

$$m\,\vec{a} \;=\; \vec{f}$$

onde $\vec{f}$, que é a força, é uma função. Em outras palavras, as leis de movimento afirmam que a força aplicada sobre o corpo é igual a uma determinada função. Esta pode ser uma função do tempo, da velocidade, da posição, ou pode ser uma constante ou mesmo uma função mais complicada. Estudaremos esses vários casos posteriormente (página 93 e seguintes). A forma geral $m\,\vec{a} = \vec{f}$ das equações de movimento é conhecida como *Segunda Lei de Newton*.

As forças podem ser classificadas quanto a sua *natureza*, segundo a qual são conhecidas a força *gravitacional*, a força *elétrica*, a força *magnética* e dois tipos de força *nuclear*, a *forte* e a *fraca*. A força gravitacional é universal, ou seja, existe entre dois corpos quaisquer. É uma força atrativa. A força elétrica pode ser atrativa ou repulsiva e atua entre corpos carregados eletricamente, ou é criada por campo magnético variável. A força magnética existe entre cargas em movimento. As forças nucleares são responsáveis pela coesão dos núcleos atômicos dos materiais e são observadas nos espalhamentos de partículas elementares.

As forças de coesão dos corpos e de resistência à interpenetração dos corpos são entendidas como sendo forças de natureza elétrica ou nuclear. O *atrito* é uma força de natureza elétrica.

Nós nos interessaremos neste texto por algumas características algébricas das leis de movimento, de modo que adotaremos um critério *algébrico* para classificá-las. Estudaremos 1) a força proporcional ao inverso do quadrado da distância, 2) a força elástica, que é proporcional à distância e 3) alguns modelos simples para a força de atrito.

Força Proporcional ao Inverso do Quadrado da Distância

A força gravitacional e a força *eletrostática* são dois exemplos de força que diminui com o quadrado da distância. A lei da força gravitacional, também conhecida como *Lei da Gravidade* ou *Lei de Newton da Atração Universal*, é

> *Matéria atrai matéria na razão direta de suas massas e na razão inversa do quadrado da distância.*

Podemos escrever para dois corpos quaisquer

$$m_{\text{inercial}} \cdot \vec{a} = -\,\mathrm{G}\,\frac{M_{\text{gravitacional}} \cdot m_{\text{gravitacional}}}{r^2}\,\hat{r}$$

onde G é uma constante universal, denominada *Constante Universal da Gravitação* e que é igual a $6{,}67.10^{-11}\mathrm{N}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$ (veja-se página 65), $M_{\text{gravitacional}}$ e $m_{\text{gravitacional}}$ são as massas gravitacionais (grandeza definida a seguir) do primeiro e segundo corpos respectivamente, m_{inercial} é a massa inercial do segundo corpo, $\vec{a}$ é a aceleração (do segundo corpo) em relação a um referencial inercial, e r é a distância entre os corpos sendo $\hat{r}$ um versor que tem a direção que contém os corpos e aponta do primeiro para o segundo. O sinal negativo indica que a força é atrativa. A força descrita está sendo aplicada sobre o segundo corpo.

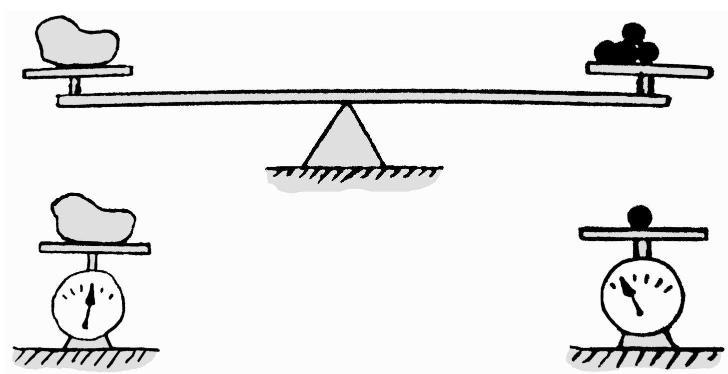
A lei de força eletrostática (elétrica, constante no tempo) pode ser escrita como

$$m\,.\,\vec{a} = \mathrm{k}\,\frac{Q\,.\,q}{r^2}\,\hat{r}$$

onde k é uma constante que depende do material existente entre os corpos (para o vácuo é igual a $8{,}99.10^9\mathrm{N}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$) e Q e q são quantidades de carga dos dois corpos que interagem (C é a unidade de carga *coulomb*). Neste texto não estudaremos as grandezas elétricas.

A força de gravidade entre dois corpos é proporcional às suas massas gravitacionais. Massa gravitacional e massa inercial são grandezas diversas. Ocorre contudo na natureza um fato notável, que discutiremos adiante (página 66), estas duas grandezas são rigorosamente proporcionais, ou são iguais. Vejamos a definição de massa gravitacional.

Quando um corpo está em repouso na superfície de um planeta, este o atrai, e o chão o impede de descer. Chamamos de *peso* ($\vec{P}$) do corpo a força com que ele é atraído. Um peso é medido por intermédio de uma balança, de haste ou de mola.



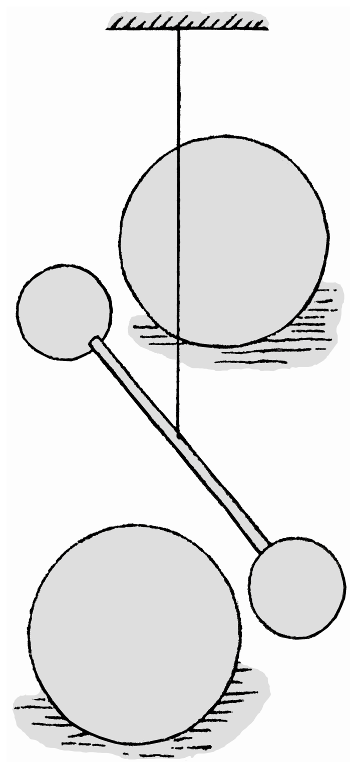
Escolhamos um corpo qualquer e convencionemos que ele possui massa gravitacional unitária. Então a massa gravitacional de qualquer outro corpo será dada pela relação entre o peso do corpo em questão e o peso do corpo escolhido como unidade, ambos medidos nas mesmas condições. Por exemplo se o peso do corpo for 20 N no mesmo local em que o peso da unidade é 5 N teremos

$$\begin{aligned} m_{\text{gravitacional do corpo}} &= \frac{20}{5}\text{ unidades de massa gravitacional} \\ &= 4\text{ unidades de massa gravitacional}\ . \end{aligned}$$

A lei da atração universal foi enunciada por Isaac Newton quem, entre os anos 1666 a 1687 (a data precisa não é conhecida), demonstrou que um corpo sujeito a força proporcional ao inverso do quadrado da distância descreve uma trajetória elíptica (ou ainda, parabólica, hiperbólica, ou circular). As órbitas elípticas dos planetas em torno do

Sol haviam sido descritas anos antes por Johannes Kepler. Assim pois, a força aplicada sobre o planeta é proporcional ao inverso do quadrado da distância ao Sol.

A força gravitacional entre corpos com massa de alguns quilogramas, ou mesmo de algumas toneladas, é muito pequena. Newton, em seu tempo, não teve condições de realizar uma experiência para medir a força de atração entre dois corpos de massa conhecida. Foi Henry Cavendish que, em 1798, realizou a medida por intermédio de uma sensível balança de torção, aqui ilustrada na figura. Ao aproximar outros corpos a balança registrava as forças horizontais.



O valor de G é $6{,}67 . 10^{-11}\,\mathrm{N}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$ ou seja, dois corpos de um quilograma[26] cada qual colocado à distância de um metro um do outro se atraem com a força de $6{,}67 . 10^{-11}$ newtons. Cavendish, de posse do valor de G, deduziu a massa da Terra (problema 24).

Analisemos, com relação a um referencial inercial (nota de rodapé 18 à página 49), os movimentos de dois corpos inicialmente em repouso que se atraem com a força gravitacional. A aceleração de um dos corpos, *qualquer que seja este corpo*, depende apenas do outro corpo (e da distância). Este é um fato experimental. Por exemplo, próximo à superfície da Terra[27] todos os corpos, de qualquer material, caem com a aceleração de $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ (indicada com a letra g; veja-se página 34). Por certo a Terra também é acelerada com relação a um referencial inercial mas no caso essa aceleração é muito pequena (e podemos considerar, aproximadamente, a Terra mesma um referencial inercial).

Agora vejamos; a aceleração de um corpo que cai é

$$-\frac{m_{\text{gravitacional}}}{m_{\text{inercial}}}\,\frac{\mathrm{G}\,M_{\text{gravitacional}}}{r^2}\,\hat{r} \quad .$$

[26] Trata-se a seguir da equivalência entre massa gravitacional e massa inercial.

[27] Veja-se à página 67 comentário sobre a força proporcional ao inverso do quadrado da distância exercida por um corpo esfericamente simétrico.

A quantidade G $M_{\text{gravitacional}}/r^2$ depende do outro corpo e da distância. Se todos os corpos caem com a mesma aceleração a quantidade $\frac{m_{\text{gravitacional}}}{m_{\text{inercial}}}$ é a mesma para todos os corpos. É—a propósito—notável que os corpos se atraiam com instensidade proporcional à sua inércia.

A equivalência entre as duas grandezas de massa é objeto da *Teoria da Relatividade Geral*.

Sendo assim proporcionais torna-se conveniente escolher como unidade de massa gravitacional aquela do mesmo corpo que foi escolhido como possuidor da massa inercial unitária. Com isto podemos nos referir à massa de um corpo significando indistintamente massa gravitacional e massa inercial, embora sejam grandezas distintas.

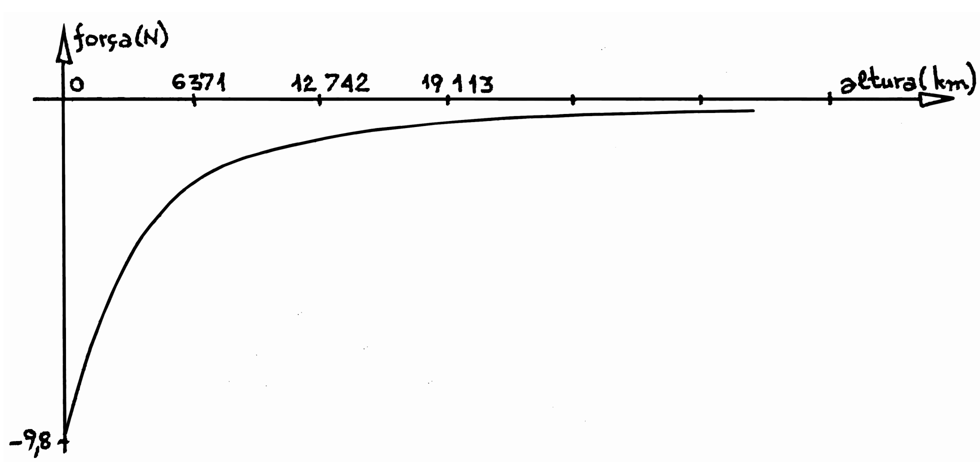
Usamos as mesmas unidades para as duas grandezas; quilograma, grama, etc.. E a lei da gravidade para um corpo qualquer pode ser simplificada para

$$\vec{a} = -\,\mathrm{G}\,\frac{M}{r^2}\,\hat{r}$$

onde M é a massa do corpo que atrai.

Problema 22

Desenhe o gráfico da força peso que a Terra aplica sobre um corpo de massa 1 kg em função da altura a partir da superfície.



Convencionamos como positivo o sentido de baixo para cima. A uma altura de 6 371 km, igual ao raio da Terra (portanto a dois raios de distância do centro), o corpo é atraído com uma força quatro vezes menor do que na superfície.

Um Pouco de História

Newton deu-se conta de que a queda dos corpos ao chão e a revolução da Lua ao redor da Terra são fenômenos da mesma natureza, relacionados pela lei do inverso do quadrado da distância. Pode-se por outro lado demonstrar que um corpo que possui simetria esférica, como é (em primeira aproximação) o caso da Terra, e no qual cada elemento exerce uma força proporcional ao inverso do quadrado da distância, exercerá uma força total como se toda a sua matéria estivesse concentrada no centro. Newton teve dificuldade para demonstrar isso, por ser necessário o cálculo integral, inexistente no seu tempo. Para tanto criou elementos do cálculo integral e diferencial, sendo seu fundador, ao lado de Gottfried Leibniz.

O raio da Terra foi medido por Eratóstenes no século III A.C. a partir da diferença das sombras no mesmo instante em duas cidades separadas por uma distância conhecida.

A distância da Terra à Lua pode ser obtida pelo raciocínio seguinte. Durante um eclipse da Lua a sombra da Terra sobre ela aparece como um disco de 6,6 cm de diâmetro colocado à distância de 2 m[28]; o Sol está muito mais distante (da Terra) do que a Lua[29] de modo que a sombra da Terra tem aproximadamente o mesmo diâmetro da própria Terra, ou seja, 12 742 km; por semelhança de triângulos tem-se a distância. Medidas precisas foram realizadas em 1751 por Nicolas de Lacaille e Joseph de Lalande; Lalande permaneceu em Berlim e registrou a posição da Lua ao passar pelo meridiano enquanto Lacaille, concomitantemente, fez a mesma medida a partir da África do Sul. Por triangulação eles obtiveram a distância.

Problema 23

Se o raio da órbita da Lua em torno da Terra é 384 000 km e seu período de revolução é 27 dias e 8 horas, e sabendo ainda que o raio da Terra é 6 371 km, qual é a aceleração da gravidade na superfície da Terra (g)?

Escrevamos a aceleração de um corpo livre próximo à superfície da Terra, e a aceleração da Lua (em relação à Terra),

$$\begin{aligned} g &= \mathrm{G}\,\frac{M_{\text{Terra}}}{r^2_{\text{Terra}}} \\ a_{\text{Lua}} &= \mathrm{G}\,\frac{M_{\text{Terra}}}{r^2_{\text{órbita da Lua}}} \quad . \end{aligned}$$

Dividindo membro a membro tem-se

$$g = \left(\frac{r_{\text{órbita da Lua}}}{r_{\text{Terra}}}\right)^2 a_{\text{Lua}} \quad .$$

Calculemos a_{Lua}. A órbita é aproximadamente circular.

$$a_{\text{Lua}} = \frac{v^2_{\text{Lua}}}{r}$$

[28] A Lua aparece como um disco de 1,8 cm colocado à mesma distância.

[29] A igualdade de tempos entre as quatro fases da Lua evidencia que o Sol está de fato muito distante. O Sol está 390 vezes mais distante da Terra do que a Lua.

A velocidade é a circunferência dividida pelo período,

$$\begin{aligned} v_{\text{Lua}} &= \frac{2\pi \times 384.10^6}{(27+\frac{1}{3}).24.3600} \\ &= 10^3\,\text{m/s} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{\text{Lua}} &= \frac{10^6}{384.10^6} \\ &= 0,0027\,\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

e substituindo,

$$\begin{aligned} g &= \left(\frac{384.10^6}{6\,371.10^3}\right)^2 .\,0,0027 \\ &= 9,8\,\text{m/s}^2 \ . \end{aligned}$$

Problema 24

Sabendo que a constante da gravitação é 6,67.10^{-11} N$\frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}$ e a massa e o raio da Terra são respectivamente 5,983.10^{24} kg e 6,371.10^6 m, calcule a aceleração da gravidade g.

$$\begin{aligned} g &= \text{G}\,\frac{m_{\text{Terra}}}{r^2_{\text{Terra}}} \\ &= 6,67.10^{-11}\,\frac{5,983.10^{24}}{(6,371.10^6)^2} \\ &= 9,8\,\text{m/s}^2 \ . \end{aligned}$$

Cavendish fez este cálculo no sentido contrário; a partir de G e g obteve a massa da Terra.

Força Elástica

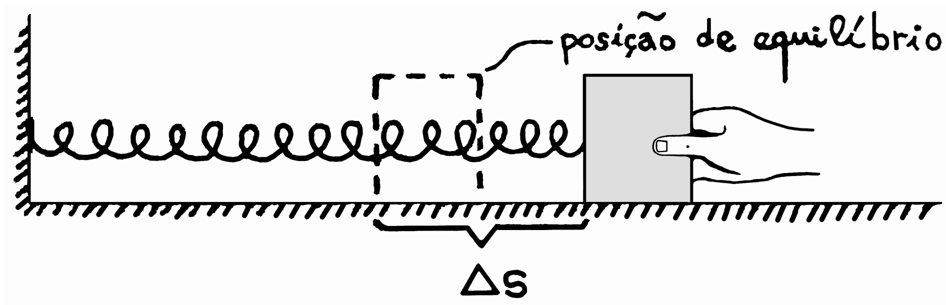
É a força que tem direção igual e sentido contrário ao deslocamento a partir de uma origem e cujo módulo é proporcional a esse deslocamento. Estudaremos apenas o caso unidimensional. Escrevemos

$$m\,.\,a = -\,\text{K}\,\triangle s$$

onde K é uma constante denominada *constante elástica*. O sinal negativo indica que a força se opõe ao deslocamento. A origem é o ponto de equilíbrio[30], onde a força é nula.

[30]Equilíbrio é a situação de aceleração nula. Os problemas 27, 28, 29 e 49 estudam situações de equilíbrio.

O exemplo mais típico de força elástica é o sistema *mola linear - massa* (ver a figura).



Quando mantemos este sistema deformado e em repouso, por intermédio de um agente exterior, a força externa sobre o corpo é $K \triangle s$ e a força da mola sobre o corpo é $-K \triangle s$. Os pequenos deslocamentos dos pêndulos e as pequenas deformações dos sólidos também obedecem a este tipo de força (veja-se páginas 99 e 101). Ela pode ser também chamada *força de restituição linear* sendo ainda conhecida como *lei de Hooke*. A linearidade está expressa no fato de que $\triangle s$ aparece elevado ao expoente 1; o gráfico *força* $\times$ *deslocamento* é uma reta.

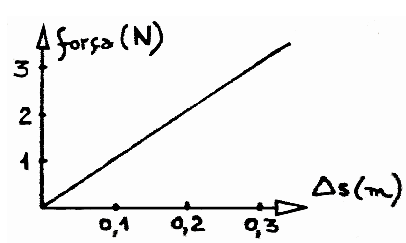
Problema 25

Uma mola deforma-se obedecendo à tabela seguinte.

força	deformação
0 N	0 m
1 N	0,1 m
2 N	0,2 m
3 N	0,3 m

Esta mola obedece a uma lei linear? Em caso afirmativo, qual é sua constante elástica?

Esta mola obedece à lei $força = 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.\triangle s$, onde $\triangle s$ é a deformação em metros. A mola é linear e possui constante elástica 10 newtons/metro. Segue sua representação gráfica.



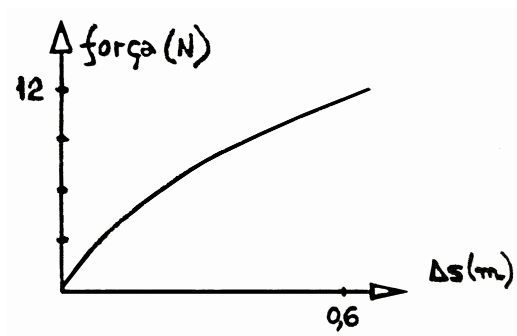
Problema 26

Uma mola deforma-se obedecendo à tabela seguinte.

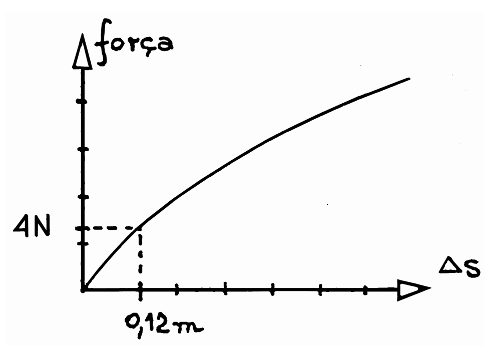
força (N)	deformação (m)
0	0
3	0,032
6	0,210
9	0,382
12	0,600

Qual será a deformação quando se aplicar uma força de 4 N? Se uma pessoa pendurar nesta mola um corpo de peso 4 N e em seguida causar com a mão uma deformação total de 0,15 m, pergunta-se, ao abandonar assim o sistema o corpo subirá ou descerá (imediatamente após soltar)?

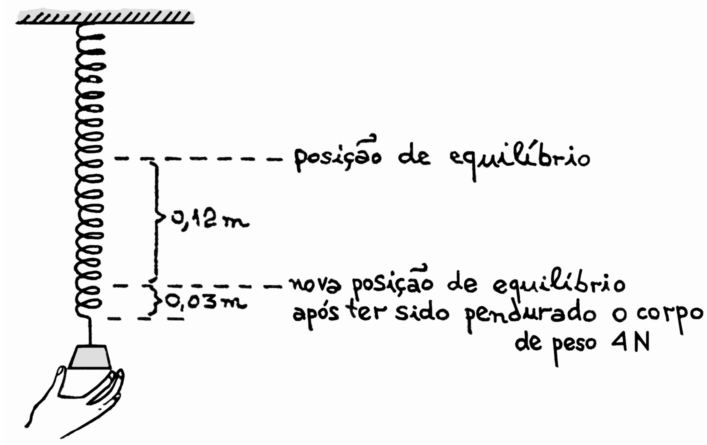
Esta mola não é linear. Segue seu gráfico força $\times$deformação.



Não é possível deduzir uma expressão algébrica da dependência da força com a deformação a partir dos dados do problema. Existem métodos analíticos que procuram valores para parâmetros de funções dadas que melhor ajustem conjuntos de números. Não faremos esse tipo de análise. Resolvamos graficamente.



Para uma força de 4 N a deformação é 0,12 m. E, se com um corpo deste peso pendurado na mola uma pessoa distendê-la até 0,15 m, ao abandonar o sistema o corpo *subirá*. Ver figura.



(Por curiosidade será fornecida a forma algébrica da lei desta mola: $4\sqrt{1+25\,\triangle s}-4$.)

Atrito

Quando as superfícies de dois corpos entram em contato e se movem ou algum agente tende a movê-las paralelamente uma em relação à outra, aparece sempre, embora possa ser pequena, uma força que se opõe ao deslizamento, que chamamos *força de atrito.* Conforme o entendimento que se tem da estrutura da matéria trata-se de uma força de natureza eletrostática.

Na figura acima temos situações em que se tem contato entre superfícies. O atrito pode ser *sólido*, entre duas superfícies sólidas, ou *viscoso*, quando ao menos um dos corpos é um fluido. O atrito sólido pode ser *estático*, quando as duas superfícies não se movem uma em relação à outra, ou *cinético*, em caso contrário.

O atrito estático é um *vínculo*. Vínculo é uma restrição ao movimento. Nós voltaremos adiante a tratar deste conceito (página 72). Um vínculo exerce sobre o corpo a força necessária para que ele seja obedecido. Assim, é necessário conhecer o movimento do sistema para se conhecer as forças de vínculo (veja-se página 74). Nos problemas 28 e 35 calcularemos forças de atrito estático.

Existe o *atrito estático máximo* ou *força máxima de atrito estático*. Um modelo simples para esta força, e que adotaremos para efeito de resolução de problemas, consiste em considerá-la proporcional ao módulo da força normal ($N = |\vec{N}|$) entre as duas superfícies,

$$\begin{array}{l}\text{força máxima (em módulo)}\\ \text{de atrito estático}\end{array} \quad = \quad \mu_{\text{est.}}\ N \quad ,$$

onde $\mu_{\text{est.}}$ é o *coeficiente de atrito estático*, que é uma característica das superfícies. Deve-se contudo fazer notar que a observação experimental frequentemente mostra desvios importantes com relação a este modelo.

A força de atrito cinético tem sentido contrário à velocidade (ou seja, desacelera uma superfície em relação à outra) e podemos num modelo simples considerá-la proporcional ao módulo da força normal e independente da velocidade,

$$\begin{array}{l}\text{força (em módulo)}\\ \text{de atrito cinético}\end{array} \quad = \quad \mu_{\text{cin.}}\ N \quad ,$$

onde $\mu_{\text{cin.}}$ é o *coeficiente de atrito cinético*, que é característico das superfícies. Observa-se que $\mu_{\text{cin.}}$ é menor que $\mu_{\text{est.}}$.

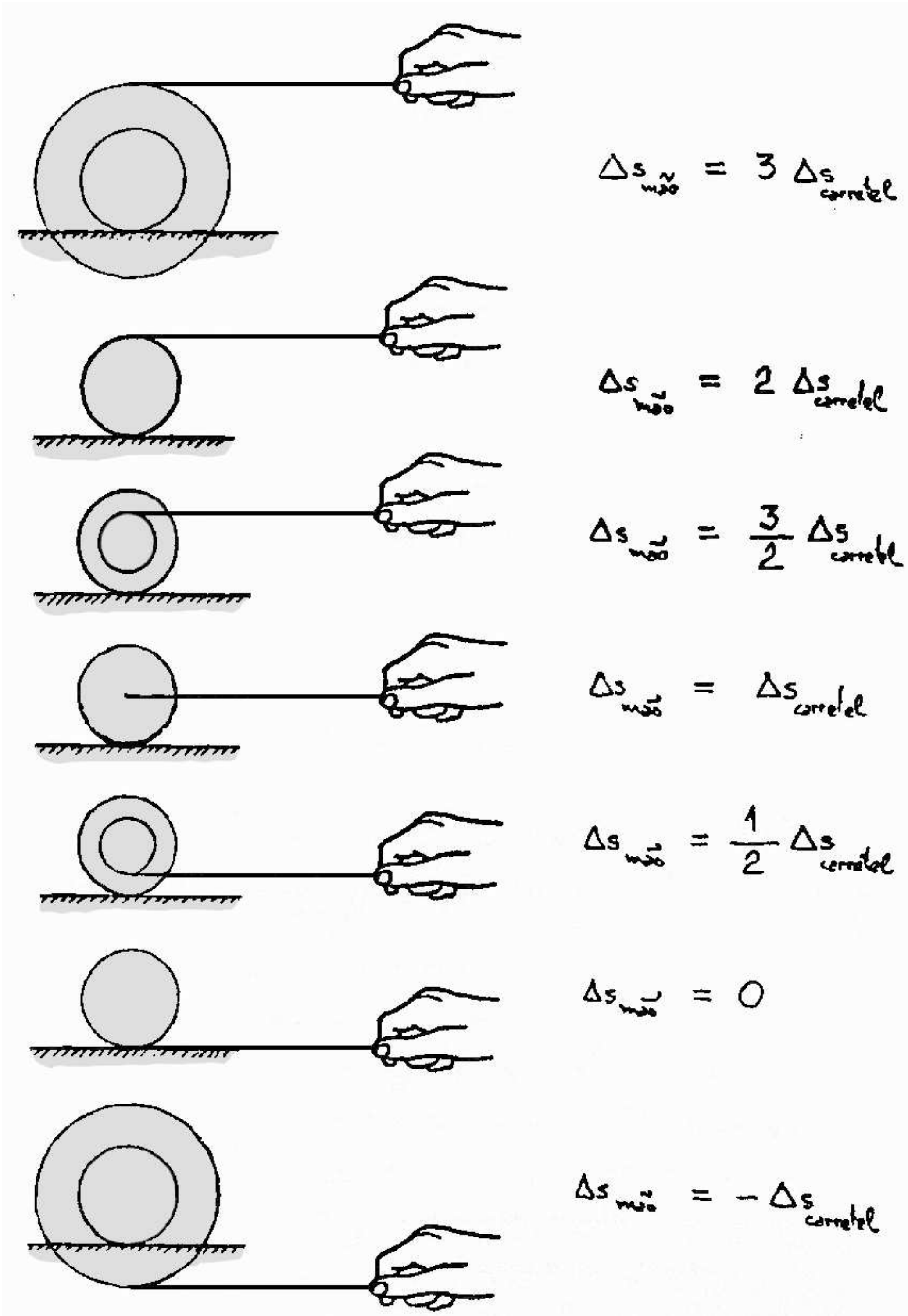
A força de atrito viscoso tem sentido contrário à velocidade. Um modelo possível consiste em considerá-la proporcional à velocidade,

$$\begin{array}{l}\text{força (vetor)}\\ \text{de atrito viscoso}\end{array} \quad = \quad \mu_{\text{viscoso}}\ \vec{v} \quad .$$

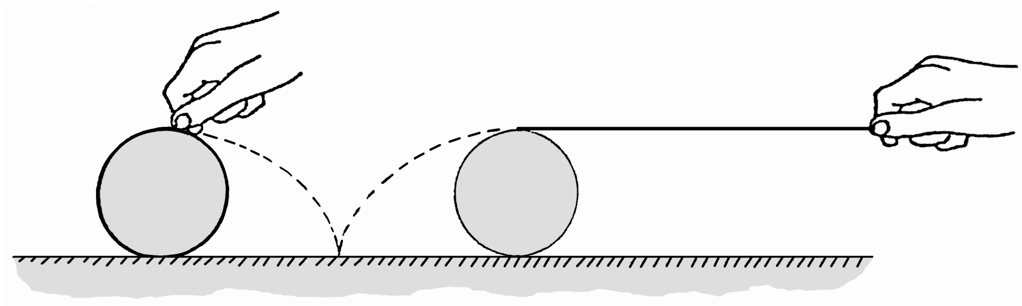
3.5 Problemas com Várias Forças; Vínculos

Um sistema físico é constituído de corpos que interagem entre si e com o exterior. Os problemas a que nos dedicaremos fornecem descrições de sistemas específicos e pedem as acelerações dos corpos que constituem cada sistema, bem como as forças entre os corpos. Ou vice-versa, fornecem a aceleração e pedem alguma característica do sistema.

Frequentemente os sistemas incluem vínculos. Um vínculo é uma restrição ao movimento de um corpo; por exemplo, o trilho, que obriga o trem a permanecer sobre ele; a corda de um pêndulo; o chão, que obriga os corpos a permanecerem acima dele, etc.. Cada maneira de se acoplar corpos constitui um mecanismo, ou máquina. Em cada mecanismo existe uma relação definida entre os deslocamentos das várias partes, denominada *relação de vínculo* ou *equação de vínculo*. Por exemplo vejamos as sequintes situações em que um carretel rola sem deslizar enquanto é tracionado por uma corda nele enrolada (a relação entre os raios é 2/1 na 1.ª, na 3.ª, 5.ª e 7.ª situações; $\triangle s$ significa deslocamento). Ver figura.



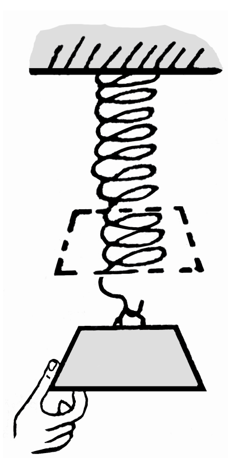
Raciocinemos por exemplo com a segunda situação. Se o carretel se mover uma distância $\triangle s$, para a direita por exemplo, um comprimento de corda igual a $\triangle s$ se desenrolará do carretel. Portanto a mão se move $\triangle s$ devido ao movimento do carretel mais $\triangle s$ devido à corda que se desenrola; $2\,\triangle s$ portanto (ver figura a seguir). As outras situações são análogas.



Um vínculo exerce sobre o corpo a força necessária para que ele seja obedecido (até um limite em que o vínculo é rompido). Sendo assim as forças de vínculo são incógnitas do problema, ou em outras palavras, é preciso conhecer o movimento do sistema para que sejam calculadas as forças de vínculo. Um exemplo simples é a determinação da força que um trilho exerce sobre um vagão de trem em uma curva circular no plano horizontal; é necessário saber a velocidade do trem (além do raio da curva) para calcular $m\,\frac{v^2}{r}$.

Nos problemas que seguem analisaremos vários mecanismos. As resoluções têm como ponto de partida a forma $m\,\vec{a} = \vec{f}$ das equações de movimento.

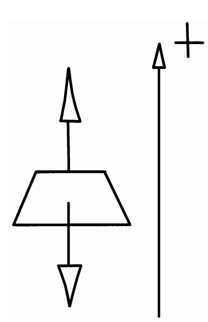
Problema 27



Pendurou-se cuidadosamente um corpo de massa 0,1 kg em uma mola de constante elástica 10 N/m, de modo que no final do processo o sistema ficou em equilíbrio (ver figura). Qual foi a deformação ocorrida na mola? ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.)

$$m\,a = f$$

Desenharemos um esquema do corpo em questão com as forças de interesse. Orientaremos o eixo vertical com o sentido positivo para cima.

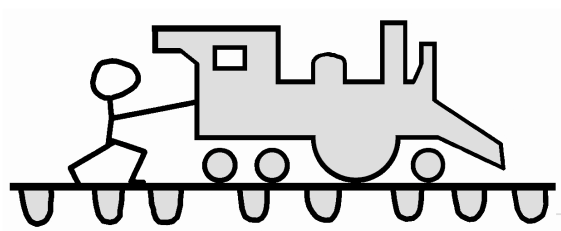


O corpo está em equilíbrio ($a = 0\,\mathrm{m/s}$).

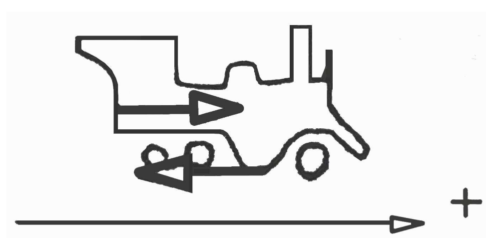
$$
\begin{aligned}
0 &= \mathrm{K} \triangle s - m\, g \\
\triangle s &= \frac{0{,}1\,.\,10}{10} \\
&= 0{,}1\,\mathrm{m} \quad .
\end{aligned}
$$

A igualdade $0 = \mathrm{K} \triangle s - m\, g$ pode ser enunciada como *No equilíbrio a soma das forças aplicadas sobre o corpo é nula.*.

Problema 28



Um menino tentou empurrar uma locomotiva estacionada sobre um trilho horizontal, exercendo sobre ela uma força de 1 N. A locomotiva pesa 200 000 N e estava freiada, sendo que o coeficiente de atrito das rodas com o trilho é 0,5. Qual foi o valor (do módulo) da força de atrito? Qual é o valor (do módulo) da força de atrito máxima?



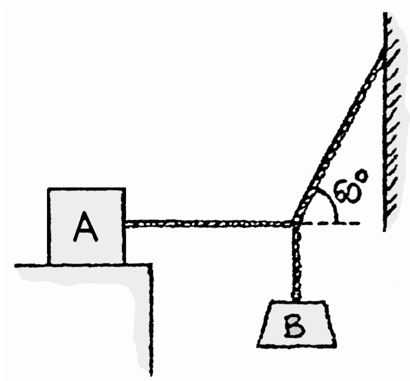
A locomotiva está em equilíbrio.

$$
\begin{aligned}
0 &= f_{\text{menino}} - f_{\text{atrito}} \\
&= 1 - f_{\text{atrito}} \\
f_{\text{atrito}} &= 1\,\mathrm{N} \quad .
\end{aligned}
$$

Por outro lado a força de atrito máxima é

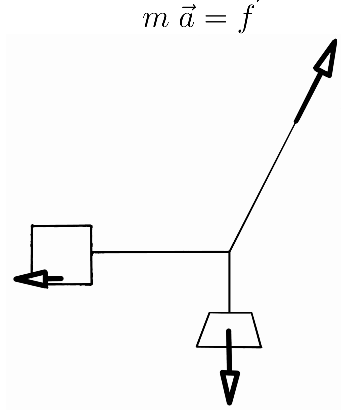
$$
\mu_{\text{est.}}\, N = 0{,}5\,.\,200\,000 = 100\,000\,\mathrm{N} \quad .
$$

Problema 29



O bloco A do sistema ilustrado pesa 80 kgf. O coeficiente estático entre o bloco e a mesa é 0,6. Determine o peso máximo do bloco B para o qual o sistema permanece em equilíbrio.

$$m\,\vec{a} = \vec{f}$$



Eixo y (ver 2.ª nota de rodapé à página 52):

$$\begin{aligned} m\,a_y &= f_y \\ 0 &= T\,\mathrm{sen} 60^\circ - \mathrm{peso_B} \\ \mathrm{peso_B} &= T\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

onde T é a tensão (ou seja, o módulo da força aplicada) na corda de inclinação 60°. Calculemos T (na situação de tensão máxima).

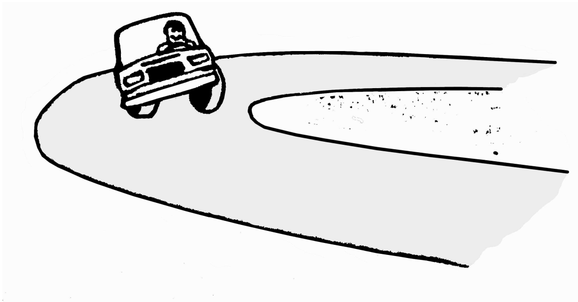
Eixo x:

$$\begin{aligned} m\,a_x &= f_x \\ 0 &= T\,\cos 60^\circ - f_{\text{atrito máxima}} \\ &= T\,\frac{1}{2} - \mu_{\text{est.}}\,\mathrm{peso_A} \\ T_{\text{máximo}} &= 2\,.\,0{,}6\,.\,80 \\ &= 96\,\mathrm{kgf} \quad . \end{aligned}$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} \mathrm{peso}_{\mathrm{B}_{\text{máximo}}} &= 96\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 83,19\,\mathrm{kgf} \quad . \end{aligned}$$

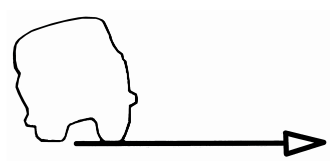
Problema 30



Uma estrada possui uma curva não inclinada cujo raio é 180 m. O coeficiente de atrito (estático) entre as rodas dos automóveis e a estrada é 0,5. Qual é a velocidade máxima possível nessa curva? ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.)

$$\begin{aligned} a_{\text{centrípeta}} &= \frac{v^2}{r} \\ v_{\text{máxima}} &= \sqrt{a_{\text{centrípeta máxima}} \,.\, r} \end{aligned}$$

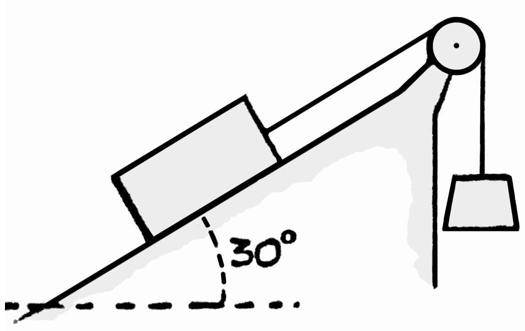
Cálculo da aceleração centrípeta máxima,



$$\begin{aligned} m\,a &= f \\ m \,.\, a_{\text{centrípeta máxima}} &= \mu \,.\, \text{peso} \\ a_{\text{centrípeta máxima}} &= \frac{\mu \,.\, \cancel{m}\, g}{\cancel{m}} = \mu \,.\, g = 0{,}5 \,.\, 10 = 5\,\mathrm{m/s^2} \,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{\text{máxima}} &= \sqrt{5 \,.\, 180} \\ &= 30\,\mathrm{m/s} \;\; (108\,\mathrm{km/h}) \,. \end{aligned}$$

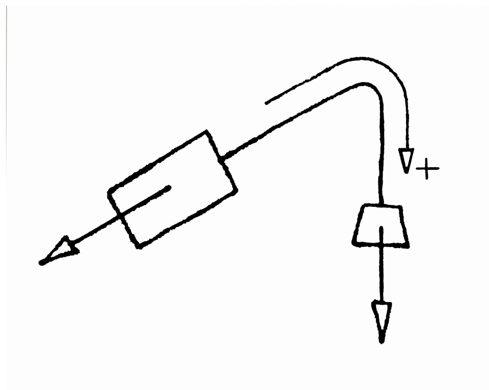
Problema 31



Um bloco (A) de massa 40 kg, colocado sobre um plano de inclinação 30° e de atrito desprezível, está ligado por uma corda através de uma polia a um segundo corpo (B) de massa 15 kg suspenso verticalmente (conforme figura). (A corda e a polia têm massas desprezíveis e se movem com atrito desprezível.) Calcule a aceleração (em módulo) de cada bloco e a tensão na corda. ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.)

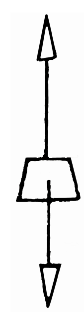
Os dois blocos possuem a mesma aceleração porque são vinculados por uma corda de comprimento constante. Sendo assim podemos calcular a aceleração com uma única equação de movimento para os dois corpos em conjunto. (Contudo em outros sistemas em que o(s) vínculo(s) seja(m) mais complexo(s) necessitaremos escrever várias equações de movimento e incluir ainda a(s) equação(ões) de vínculo; veja-se problemas 34, 35 e 36.)

Desenharemos apenas as projeções das forças ao longo do caminho permitido. As projeções perpendiculares a esse caminho têm resultante nula.



$$
\begin{aligned}
(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})\, a &= m_\mathrm{B}\, g - m_\mathrm{A}\, g \,\mathrm{sen} 30^\circ \\
(40 + 15)\, a &= 15 \,.\, 10 - 40 \,.\, 10 \,.\, \frac{1}{2} \\
a &= -\,0,91\,\mathrm{m/s^2} \quad .
\end{aligned}
$$

O sinal negativo significa sentido contrário ao convencionado como positivo. Para calcularmos uma força interna do sistema escrevemos a equação de movimento de um dos corpos. Por exemplo, para o bloco B,



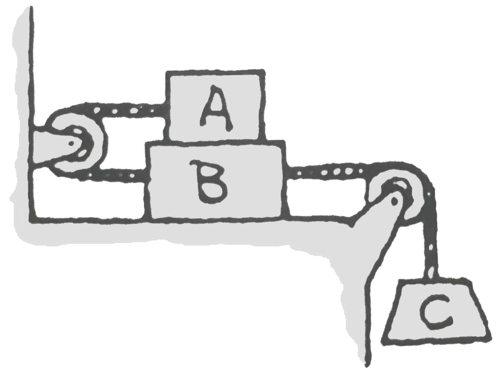
$$
\begin{aligned}
m_\mathrm{B}\, a &= m_\mathrm{B}\, g - T \\
15\,(-0,91) &= 15 \,.\, 10 - T \\
T &= 163,3\,\mathrm{N} \quad .
\end{aligned}
$$

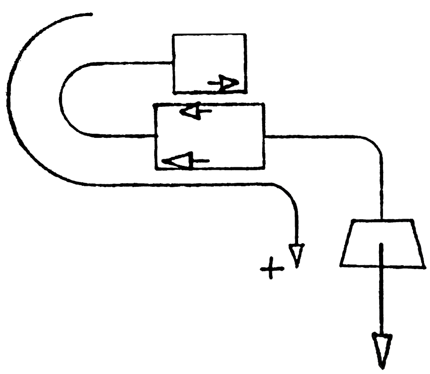
Pode-se fazer uma verificação algébrica com o bloco A, para o qual $m\,a$ deve ser igual a f;

$$40\,(-0,91) \;\stackrel{?}{=}\; 163,6 - 200$$

Problema 32

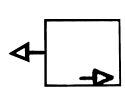
Os corpos A, B e C, de massas 5 kg, 10 kg e 20 kg respectivamente, estão ligados por cordas e roldanas conforme mostra a figura. (As cordas e roldanas têm massas desprezíveis e se movem com atrito desprezível.) Sabendo-se que o coeficiente de atrito entre os corpos A e B é 0,9 e o coeficiente de atrito entre o corpo B e a mesa é 0,5 pede-se a aceleração do sistema e as tensões nas duas cordas ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$).





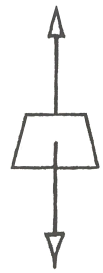
$$
\begin{aligned}
(m_A + m_B + m_C)\,a &= m_C\,g - \mu_{B,\mathrm{mesa}}\,(m_A + m_B)\,g - 2\,\mu_{A,B}\,m_A\,g \\
35\,a &= 200 - 75 - 2\,.\,45 \\
a &= 1\,\mathrm{m/s^2}\ .
\end{aligned}
$$

Bloco A:



$$
\begin{aligned}
m_A\,a &= T_1 - \mu_{A,B}\,m_A\,g \\
5\,.\,1 &= T_1 - 45 \\
T_1 &= 50\,\mathrm{N}\ .
\end{aligned}
$$

Bloco C:



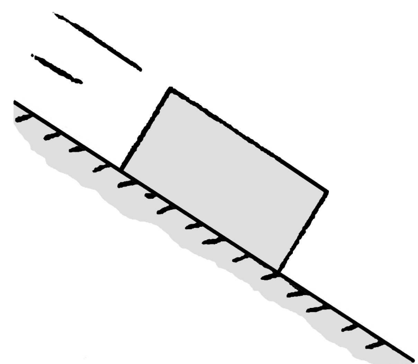
$$
\begin{aligned}
m_{\mathrm{C}}\, a &= m_{\mathrm{C}}\, g - T_2 \\
20\,.\,1 &= 20\,.\,10 - T_2 \\
T_2 &= 180\,\mathrm{N} \quad .
\end{aligned}
$$

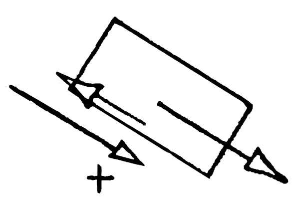
Verificação (bloco B):

$$
m_{\mathrm{B}}\, a \overset{?}{=} T_2 - T_1 - f_{\text{atrito,A}} - f_{\text{atrito,mesa}}
$$

Problema 33

Um bloco está escorregando para baixo sobre uma rampa de inclinação 30°. O coeficiente de atrito do bloco com a superfície da rampa é 0,231. Calcule a aceleração do bloco ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$).



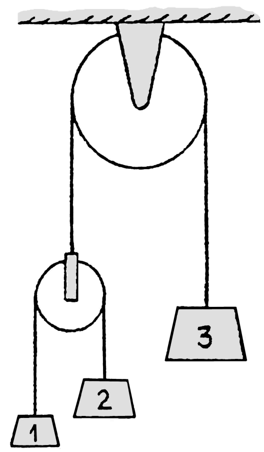


$$
m\,a = \text{componente do peso} - \mu\,.\,\text{normal} \quad .
$$

O componente do peso normal ao plano (que não está desenhado na figura) tem módulo $m\,g\,\cos 30°$.

$$
\begin{aligned}
m\,a &= m\,g\ \mathrm{sen}30° - \mu\, m\, g\, cos30° \\
a &= 10\,\frac{1}{2} - 0,231\,.\,10\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 3\,\mathrm{m/s^2} \quad .
\end{aligned}
$$

Problema 34



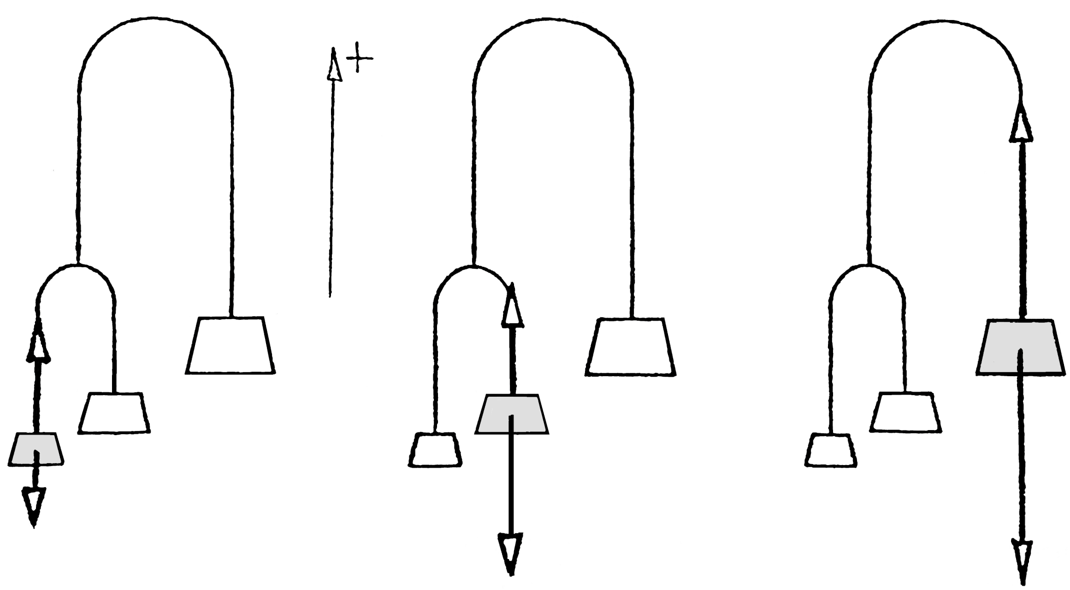
No sistema da figura os blocos 1, 2 e 3 possuem as massas respectivamente iguais a 100 kg, 200 kg e 300 kg. As cordas e as polias têm massas desprezíveis e se movem com atrito desprezível. Calcule as acelerações dos três blocos e as tensões nas duas cordas ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$).

Este sistema apresenta vínculos mais complexos, de tal modo que as acelerações dos vários corpos são diferentes entre si. Para resolver o problema é necessário escrever uma equação para cada movimento (equações de movimento) e em seguida escrever as equações de vínculo. O sistema físico fica assim representado algebricamente por um conjunto de equações, com tantas equações quanto são as incógnitas. Para conhecer qualquer uma das incógnitas é necessário resolver o problema todo.

Equações de movimento.

Há três movimentos, que são as translações dos três blocos[31]. Então,

$$m\,a = f \qquad\qquad m\,a = f \qquad\qquad m\,a = f$$



$$m_1\,a_1 = T_1 - m_1\,g \qquad\qquad m_2\,a_2 = T_2 - m_2\,g \qquad\qquad m_3\,a_3 = T_3 - m_3\,g$$

onde convencionamos como positivo o sentido para cima. Temos três equações com seis incógnitas, a_1, T_1, a_2, T_2, a_3 e T_3. Mas os movimentos destes blocos são relacionados entre si, conforme segue.

[31]Nos casos em que o sistema inclui rotações de corpos de massa não desprezível devemos escrever também as equações para essas rotações. Neste capítulo nos limitaremos aos movimentos de translação.

Equações de vínculo.

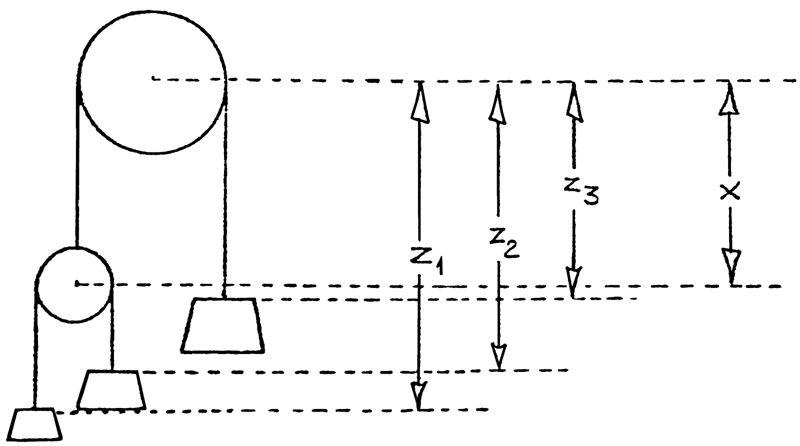
$$T_2 = T_1$$

porque[32] a polia inferior tem massa desprezível. Ademais,

$$T_3 = T_1 + T_2$$

por duas razões, 1) tendo a polia inferior uma massa desprezível a resultante sobre ela é desprezível e 2) a massa da polia superior é desprezível.

A última equação é uma relação entre as acelerações devido a terem as cordas comprimentos constantes. Especifiquemos os comprimentos z_1, z_2, z_3 e x por intermédio da figura a seguir,



$$x + z_3 = \text{constante}$$

onde essa constante é o comprimento da corda superior (menos a parte da corda encostada na periferia da polia). Ademais,

$$(z_1 - x) + (z_2 - x) = \text{constante'}$$

onde constante' é o comprimento da corda inferior (menos a parte encostada na polia). Somente os comprimentos z_1, z_2 e z_3 apresentam interesse, por determinarem as posições dos blocos, de modo que eliminaremos x substituindo a primeira igualdade na segunda,

$$z_1 + z_2 + 2\,z_3 = 2\,\text{constante} + \text{constante'} \ ,$$

da qual a derivada segunda (em relação ao tempo) é

$$a_1 + a_2 + 2\,a_3 = 0 \ .$$

[32]Esta igualdade foi apresentada aqui como uma equação de vínculo mas a rigor ela deveria ter sido apresentada como a equação de movimento de rotação de uma roda de massa desprezível, tratando como equações de vínculo apenas as relações entre acelerações. Preferiu-se contudo deixar para se tratar das rotações num capítulo posterior.

Reescrevamos juntas as equações (já substituindo $T_2 = T_1$ e $T_3 = 2\,T_1$);

$$\begin{cases} m_1\,a_1 &= \quad T_1 - m_1\,g \\ m_2\,a_2 &= \quad T_1 - m_2\,g \\ m_3\,a_3 &= 2\,T_1 - m_3\,g \\ a_1 + a_2 + 2\,a_3 &= 0 \ . \end{cases}$$

As três primeiras equações são

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{T_1}{m_1} - g \\ a_2 &= \frac{T_1}{m_2} - g \\ 2\,a_3 &= \frac{4\,T_1}{m_3} - 2\,g \end{aligned}$$

que somadas resultam

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{T_1}{m_1} - \frac{T_1}{m_2} - \frac{4\,T_1}{m_3} - 4\,g \\ 4.10 &= \frac{T_1}{100} - \frac{T_1}{200} - \frac{4\,T_1}{300} \\ T_1 &= 1411,76\,\mathrm{N} \ . \\ T_2 &= 2823,53\,\mathrm{N} \ . \end{aligned}$$

Da primeira equação tem-se

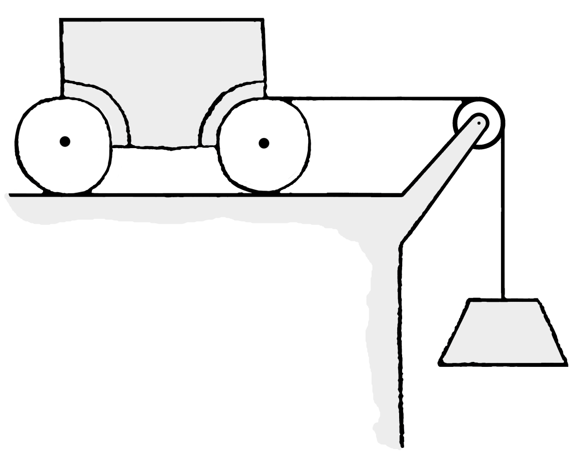
$$\begin{aligned} 300\,a_1 &= 2823,53 - 300.10 \\ a_1 &= 4,12\,\mathrm{m/s^2} \ . \end{aligned}$$

E da segunda e terceira equações tem-se

$$\begin{aligned} a_2 &= -2,94\,\mathrm{m/s^2} \ . \\ a_3 &= -0,59\,\mathrm{m/s^2} \ . \end{aligned}$$

Como verificação algébrica pode-se calcular $a_1 + a_2 + 2\,a_3$.

Problema 35

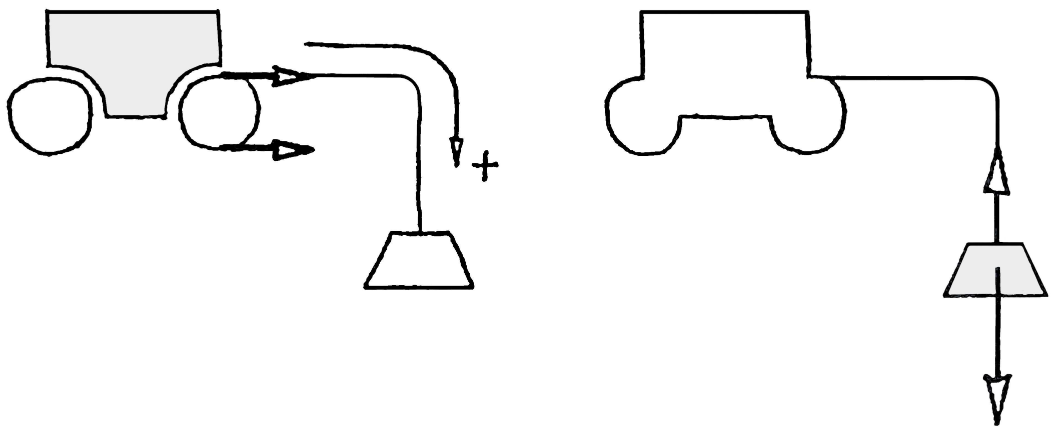


Um carrinho de massa 6 kg tem enrolado em torno de uma de suas rodas uma corda que, por intermédio de uma polia, é amarrada a um bloco de massa 1 kg (conforme a figura). (A corda e a polia têm massas desprezíveis e se movem com atrito desprezível. As rodas do carrinho têm massa desprezível e rolam sem deslizar sobre um plano horizontal.) Calcule as acelerações do carrinho e do bloco ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$).

Existe atrito entre a roda do carrinho e o plano[33]. Trata-se de um *atrito de rolamento*, que é um atrito estático (veja-se página 71), pois o ponto da roda que toca o plano está parado em relação a ele (instantaneamente parado). A condição de rolar sem deslizar é um vínculo entre a roda e o plano e a força de atrito de rolamento é uma das incógnitas do problema.

Equações de movimento.

Tem-se as translações do carrinho e do bloco.

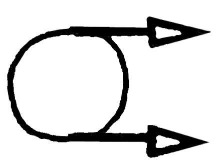


$m_{\text{carrinho}}\, a_{\text{carrinho}} = T + f_{\text{atrito de rolamento}}$ $\qquad$ $m_{\text{bloco}}\, a_{\text{bloco}} = m_{\text{bloco}}\, g - T$

A flecha representativa da força de atrito de rolamento foi desenhada com sentido arbitrário. Caso o sentido seja contrário a este o resultado terá sinal negativo.

Equações de vínculo.

Faremos aqui uma breve conceituação sobre rotações. Quando há variação de velocidade de rotação de um corpo a quantidade física de interesse é a força aplicada multiplicada por seu braço de alavanca, e denomina-se *torque*. (O braço de alavanca em torno de um ponto é a distância perpendicular deste ponto à reta suporte da força.) Como a roda aqui considerada tem, para efeito de cálculo, massa nula, o torque total sobre ela é também nulo. As duas forças que agem na periferia da roda são T e $f_{\text{atrito de rolamento}}$.



Como estas duas forças têm o mesmo braço de alavanca em relação ao centro e tendem a girar a roda em sentidos contrários pode-se escrever[34]

$$
\begin{aligned}
0 &= \text{raio} \,.\, T - \text{raio} \,.\, f_{\text{atrito de rolamento}} \\
f_{\text{atrito de rolamento}} &= T \;.
\end{aligned}
$$

[33]Senão o bloco mover-se-ia em queda livre.

[34]Vale aqui o mesmo comentário da nota 32 à página 82.

A outra equação de vínculo (veja-se figura à página 73) é

$$a_{\text{bloco}} = 2\,a_{\text{carrinho}} \quad .$$

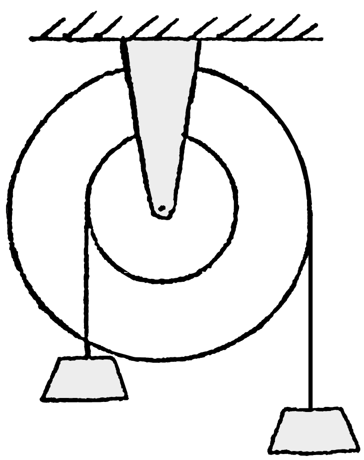
Substituindo as equações de vínculo nas equações de movimento tem-se

$$\begin{aligned} m_{\text{carrinho}}\,a_{\text{carrinho}} &= 2\,T \\ m_{\text{bloco}}\,.\,2\,a_{\text{carrinho}} &= m_{\text{bloco}}\,g - T \quad . \end{aligned}$$

Daí

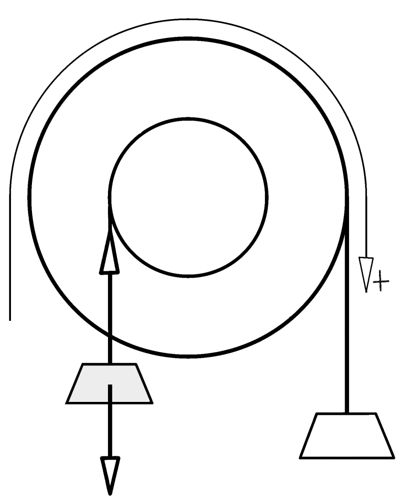
$$\begin{aligned} a_{\text{carrinho}} &= 2\,\text{m/s}^2 \quad . \\ a_{\text{bloco}} &= 4\,\text{m/s}^2 \quad . \\ f_{\text{atrito de rolamento}} = T &= 6\,\text{N} \quad . \end{aligned}$$

Problema 36

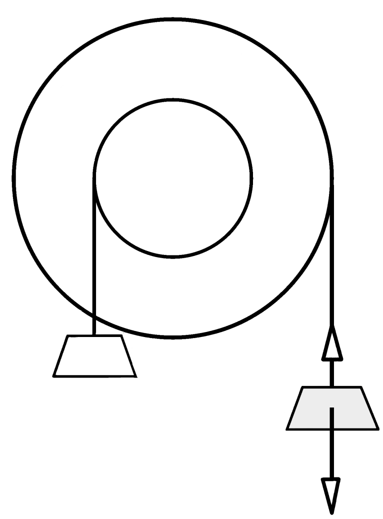


As duas polias do sistema ao lado são rigidamente ligadas entre si e o raio de uma é metade do raio da outra. Os dois blocos, cada um com massa 5 kg, estão amarrados a cordas enroladas nas polias, conforme a figura. (As cordas e as polias têm massas desprezíveis e se movem com atrito desprezível.) Calcule as acelerações dos dois blocos ($g = 10\,\text{m/s}^2$).

Equações de movimento.



$$m\,a_1 = T_1 - mg$$



$$m\,a_2 = mg - T_2$$

Equações de vínculo.

$$T_2 = \frac{1}{2} T_1$$

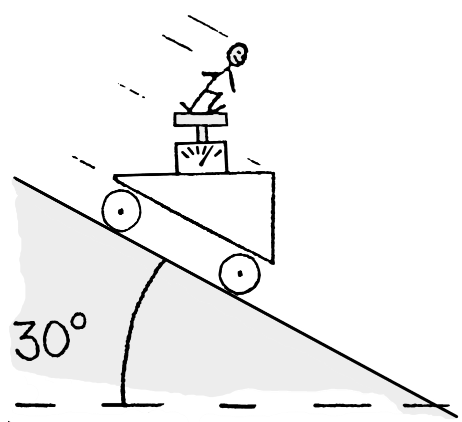
porque a massa das polias é desprezível e os braços de alavanca estão na relação 1/2 (ver explicações no problema anterior). Ademais

$$a_2 = 2\, a_1$$

Daí

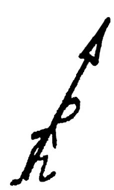
$$\begin{aligned} a_1 &= 2\,\mathrm{m/s^2}\ . \\ a_2 &= 4\,\mathrm{m/s^2}\ . \\ T_1 &= 60\,\mathrm{N}\ . \\ T_2 &= 30\,\mathrm{N}\ \ . \end{aligned}$$

Problema 37

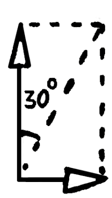


Um rapaz de massa 60 kg desliza em um carrinho ao longo de um plano de inclinação 30°, com atrito desprezível. O rapaz está apoiado sobre uma balança de mola que, durante o movimento, permanece na posição vertical (ver figura). (Há atrito entre o pé do rapaz e o prato da balança; e entre a balança e o carrinho.) Pede-se o valor marcado pela balança ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$).

A força que a balança aplica sobre o rapaz tem direção normal ao plano (porque o carrinho desliza livremente).

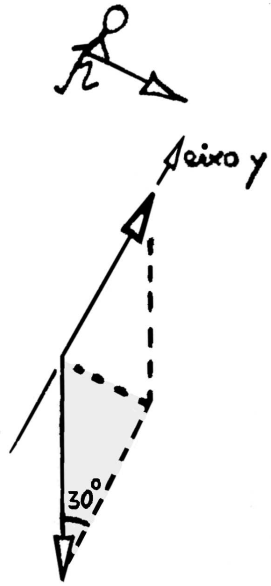


Portanto, se a balança permanece na posição vertical, sua haste não está na direção da força aplicada. E a balança marca apenas a projeção da força na direção da haste. Chamemo-la $f_{\text{leitura da balança}}$ (a outra projeção ortogonal é o módulo da força de atrito).



$$f_{\text{leitura da balança}} = f_{\text{balança}} \cos 30^\circ$$

Cálculo de $f_{\text{balança}}$.



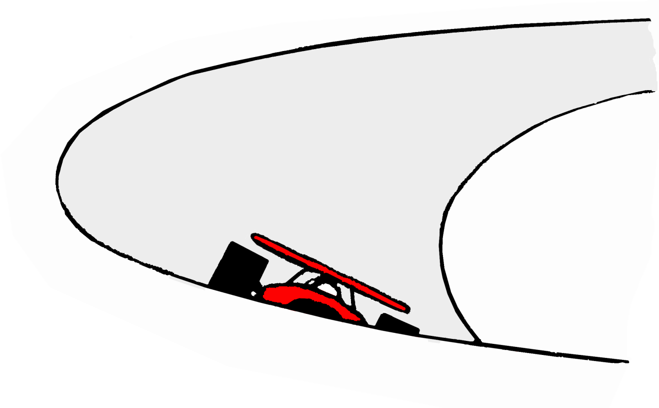
eixo y:

$$\begin{aligned} 0 &= f_{\text{balança}} - mg \cos 30^\circ \\ f_{\text{balança}} &= 60.10 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 519,6\,\mathrm{N} \quad . \end{aligned}$$

Aplicando tem-se

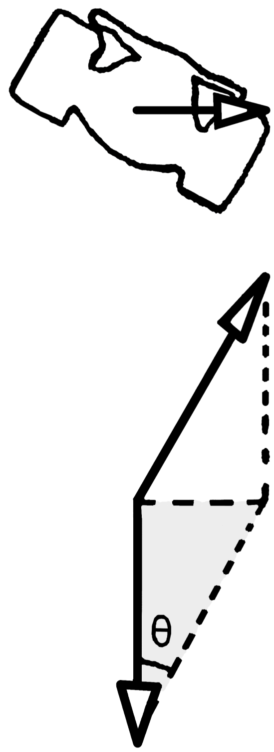
$$\begin{aligned} f_{\text{leitura da balança}} &= 519,6 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 450\,\mathrm{N} \quad . \end{aligned}$$

Problema 38



O projeto para construir uma pista de carros de corrida possui uma curva circular cujo raio é 500 m. Os carros deverão passar por aquele lugar à velocidade 50 m/s. Calcule a inclinação que deve ter a pista para que não haja perigo de derrapagem ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$).

A força resultante é horizontal.



$$\tan\theta = \frac{\text{força centrípeta}}{\text{peso}}$$

(Se se quiser equacionar na forma tradicional $m\,a = f$ escreve-se $m\,a_{\text{centrípeta}} = \text{peso}\ \tan\theta$.)

Mas

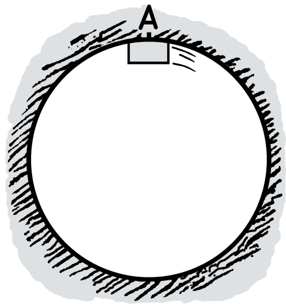
$$\begin{aligned} a_{\text{centrípeta}} &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{2500}{500} = 5\,\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\frac{5}{10} \\ &= 26^\circ\, 33'\, 54'' \ . \end{aligned}$$

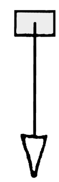
Problema 39

(Observação. Este e o próximo problemas fornecerão resultados que serão utilizados na resolução de problemas do capítulo seguinte.)



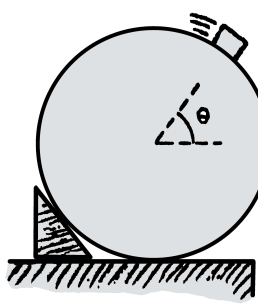
Um corpo desliza sobre a parte interna de um círculo vertical de raio r (ver figura). A aceleração da gravidade é g. Qual é a mínima velocidade com que o corpo pode passar pelo ponto mais alto da trajetória (ponto A) sem que perca contato com o círculo?

Quando o corpo estiver no ponto A, caminhando com a velocidade mínima possível para não desprender, o círculo deixará de exercer força centrípeta e a aceleração será $\vec{g}$,



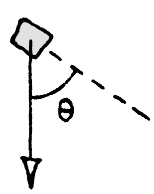
$$\begin{aligned} \frac{v_{\text{mínima}}^2}{r} &= g \\ v_{\text{mínima}} &= \sqrt{g\,r}\ . \end{aligned}$$

Problema 40



Um corpo pode deslizar sobre a parte externa de um círculo vertical de raio r (ver figura), sendo a aceleração da gravidade igual a g. Qual é a máxima velocidade com que o corpo pode passar em um ponto, em função do ângulo θ medido a partir da horizontal, sem perder contato com o círculo? (Em outras palavras, ache a velocidade de desprendimento em função de θ.)

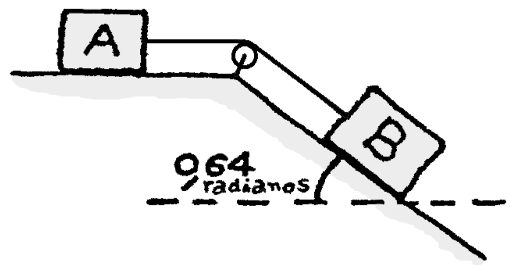
Quando o corpo estiver num ponto do círculo, caminhando com a velocidade máxima possível para não desprender, o círculo deixará de exercer força sobre o corpo e a aceleração será $\vec{g}$,



$$\begin{aligned} \frac{v_{\text{máxima}}^2}{r} &= g\ \text{sen}\theta \\ v_{\text{máxima}} &= \sqrt{g\,r\ \text{sen}\theta}\ . \end{aligned}$$

Nove problemas propostos

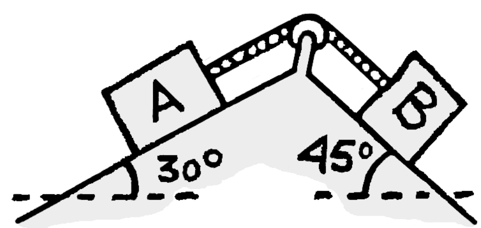
1 - Um bloco (A) de massa 10 kg, apoiado sobre um plano horizontal, é ligado por uma corda através de uma polia a um segundo bloco (B) que está apoiado sobre um plano de inclinação 0,64 radianos (conforme a figura). (A corda e a polia têm massas desprezíveis e se movem com atrito desprezível. O atrito entre os blocos e os planos também é desprezível.) A aceleração dos blocos é $2\,\mathrm{m/s^2}$. Calcule a massa do segundo bloco e a tensão na corda ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$).



5 kg; 20 N.

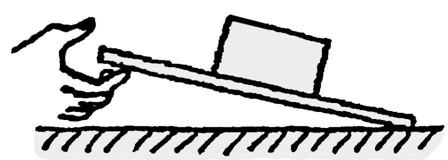
2 - No sistema da figura ao lado o bloco A tem peso de 50 N e o bloco B tem peso de 30 N. Os coeficientes de atrito de ambos os blocos com as superfícies das rampas são $\mu_{\text{estático}} = 0,1$ e $\mu_{\text{cinético}} = 0,04$. (A corda e a polia têm massas desprezíveis e se movem com atrito desprezível; $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.)

Colocado em repouso o sistema tem tendência a deslizar para a direita ou para a esquerda? Calcule a aceleração do sistema quando ele é abandonado a partir do repouso. Calcule a aceleração do sistema e a tensão na corda quando o sistema está em movimento.



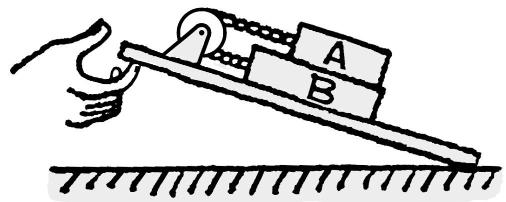
Esquerda; $0\,\mathrm{m/s^2}$; $0{,}15\,\mathrm{m/s^2}$.

3 - Um bloco está apoiado sobre uma tábua cuja inclinação pode ser variada. É necessário inclinar de um ângulo de 14° com a horizontal para que o bloco comece a escorregar. Qual é o coeficiente de atrito (estático) entre o bloco e a tábua?



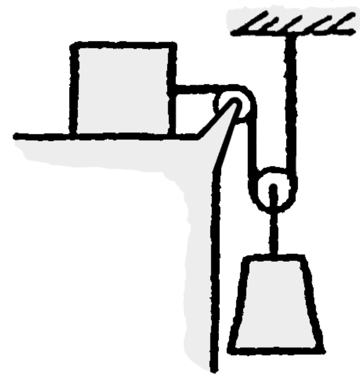
0,25 .

4 - Dois blocos A e B, de massas 2 kg e 8 kg respectivamente, estão apoiados um sobre o outro e sobre uma tábua que pode ser inclinada (ver figura). O coeficiente de atrito entre os blocos é 0,5 e o coeficiente de atrito entre o bloco B e a tábua é 0,4. (A corda e a polia possuem massas desprezíveis e se movem com atrito desprezível.) Qual é o maior ângulo que se pode inclinar a tábua sem que o sistema deslize?



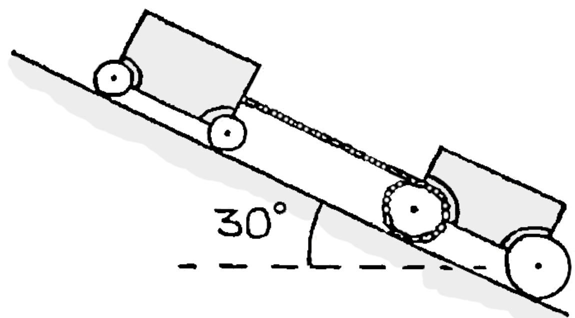
45°.

5 - Dois blocos, cada um com massa 5 kg, estão dispostos conforme mostra a figura; um bloco está apoiado sobre um plano horizontal e o outro está suspenso pela corda por intermédio de uma roldana. (A corda e as polias têm massas desprezíveis e se movem com atrito desprezível.) Calcule as acelerações dos blocos e a tensão na corda ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$).



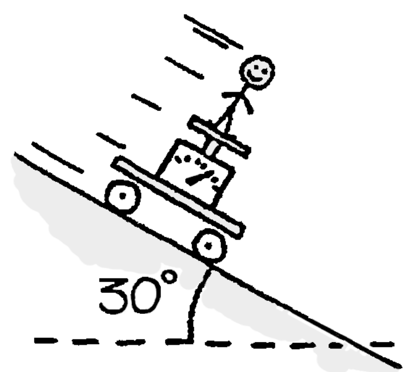
ı/s²; 20 N.

6 - Dois carrinhos, de massa 5 kg cada um estão apoiados sobre um plano de inclinação 30°. O carrinho da frente tem enrolado em torno de sua roda uma corda que por sua vez é atada ao corpo do carrinho de trás (ver figura). As rodas e a corda têm massas desprezíveis e se movem com atrito desprezível; as rodas rolam sobre o plano sem deslizar. Calcule as acelerações dos dois carrinhos e a tensão na corda ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$).

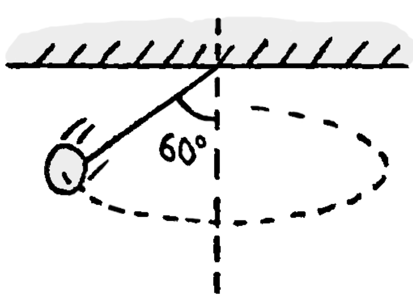


$3\,\mathrm{m/s^2}$; $6\,\mathrm{m/s^2}$; 5 N.

7 - Uma balança de mola está apoiada sobre um carrinho que desliza com atrito desprezível sobre um plano de inclinação 30° (ver figura). Sobre a balança está um rapaz de massa 60 kg. Quanto marca a balança? ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.)



519,6 N.



8 - Um corpo, amarrado a um barbante de 0,5 m de comprimento, executa um movimento circular ao redor de um eixo vertical (ver figura). O ângulo que o barbante forma com esse eixo é constante e igual a 60°. Calcule o número de voltas que o corpo realiza por unidade de tempo. ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$). 1 volta/segundo.

9 - No mesmo círculo do problema 39 página 89 ache a velocidade em cada ponto do círculo (em função do ângulo θ medido a partir de uma horizontal que passa pelo centro) para que o corpo se desprenda (perca o contato) naquele ponto. A aceleração da gravidade é $\vec{g}$. $\sqrt{g\,r\,\mathrm{sen}\theta}$.

Capítulo 4

Energia

4.1 Introdução

As leis ou equações de movimento são expressões algébricas nas quais a aceleração é escrita como função de outra grandeza, ou mais de uma grandeza (página 63). Pode ser uma função do tempo, da velocidade, da posição, etc.. Por outro lado, a maneira mais direta de descrever o movimento de um corpo é fornecer sua equação horária (página 19), ou seja, sua posição em função do tempo. Nós obteremos agora, em alguns casos de interesse, a equação horária a partir da equação de movimento. Ou em outras palavras obteremos a posição a partir da aceleração. Estudaremos alguns casos, dos quais o de maior interesse é sem dúvida o da aceleração como função da posição, que inclui os exemplos mais notáveis da natureza e nos conduzirá ao conceito de energia[35].

Uma equação que contém derivadas tem como solução uma função, ou um conjunto de funções, e é denominada *equação diferencial*. Por exemplo, a solução de $\frac{d\,y(x)}{dx} = y(x)$ é a função exponencial constante.e^x (a função que tem derivada igual a si; o número 'e' é aproximadamente 2,718). As equações de movimento são equações diferenciais, porque contém a aceleração, que é a derivada segunda da posição. Para encontrarmos a posição em função do tempo devemos integrar a equação de movimento duas vezes. E conforme o caso são necessárias também algumas transformações algébricas.

O caso de força nula resulta no movimento uniforme e o de força constante resulta no movimento uniformemente variado; a álgebra de ambos encontra-se nas páginas 31 e 32. Estudaremos o caso de força dependente do tempo porque tem resolução simples. Em seguida, como exemplo que ilustra métodos algébricos, será apresentada a força dependente da velocidade. Veremos finalmente o caso da força dependente da posição, cuja resolução conduz ao conceito de energia. Por simplicidade trataremos, nas seções **4.1**, **4.2** e **4.3**, apenas os movimentos unidimensionais.

[35] O texto que segue é conceitual e o leitor poderá optar, numa primeira leitura, por seguir diretamente à seção **4.4**, página 101.

Força Dependente do Tempo

$$m\,a = f(t)$$

Isolemos a aceleração e integremos[36].

$$\int_{t_0}^{t} a\,dt = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} f(t_i)\,dt_i$$

$$v(t) = v_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} f(t_i)\,dt_i \quad ,$$

onde $v_0 = v(t_0)$. E para achar a posição $s(t)$ integremos novamente.

$$\int_{t_0}^{t} v\,dt_i = v_0\int_{t_0}^{t} dt_i + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_i} f(t_{ii})\,dt_{ii}\,dt_i$$

$$s(t) = s_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t_i} f(t_{ii})\,dt_{ii}\,dt_i \quad ,$$

onde $s_0 = s(t_0)$.

Problema 41

Um corpo move-se em linha reta e sua aceleração varia numericamente com o tempo conforme a relação $a = \frac{15}{2}\sqrt{t}$. No instante $t = 0\,\mathrm{s}$ a velocidade é $6\,\mathrm{m/s}$. Calcule sua velocidade no instante $4\,\mathrm{s}$ e o espaço percorrido entre os instantes $1\,\mathrm{s}$ e $4\,\mathrm{s}$.

$$a = \frac{15}{2}\sqrt{t}$$

Integrando (ver página 24),

$$v - v_0 = \frac{15}{2}\,\frac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^t$$

$$v = v_0 + 5\,t^{\frac{3}{2}}$$

$$v(4\,\mathrm{s}) = 6 + 5.8 = 46\,\mathrm{m/s} \quad .$$

Integra-se novamente,

$$\triangle s_{(1\,\mathrm{s\ a\ }4\,\mathrm{s})} = \int_1^4 (v_0 + 5\,t^{\frac{3}{2}})\,dt$$

$$= 6(4-1) + 5\,\frac{2}{5}\,t^{\frac{5}{2}}\Big|_1^4$$

$$= 80\,\mathrm{m} \quad .$$

[36] As variáveis t_i e t_{ii} são variáveis de integração. Veja explicações à página 23 e à nota na página 31.

Força Dependente da Velocidade

Este caso apresenta alguns aspectos algébricos que se prestam como introdução ao caso seguinte, de maior interesse.

$$m\,a \;=\; f(v)$$

Não é possível integrar ao longo da variável t porque[37] não conhecemos a função $v(t)$. Contudo

$$\begin{aligned} m\,\frac{dv}{dt} &= f(v) \\ m\,\frac{dv}{f(v)} &= dt \end{aligned}$$

e integrando tem-se

$$m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{f(v)} \;=\; t - t_0 \;\;.$$

A integral é uma função $\varphi = \varphi(v, v_0)$ que invertida fornece

$$v \;=\; v\left(v_0, \frac{t-t_0}{m}\right) \;\;,$$

ou seja, a velocidade em função do tempo. E integrando-se novamente tem-se

$$s \;=\; s_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt \;\;.$$

Um exemplo de força dependente da velocidade é o modelo de atrito viscoso com força proporcional à velocidade (página 72). Temos

$$\begin{aligned} m\,a &= -\mu\,v \\ m\,\frac{dv}{dt} &= -\mu\,v \\ \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} &= -\frac{\mu}{m}\int_0^t dt \\ \ln\frac{v}{v_0} &= -\frac{\mu}{m}\,t \\ v &= v_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{m}\,t} \;\;. \end{aligned}$$

---

[37] Seria $m\int_{t_0}^{t} a\,dt = \int_{t_0}^{t} f(v)\,dt\,\ldots$

Em palavras, a velocidade diminui exponencialmente com o tempo. Continuando,

$$\begin{aligned} \int_0^t v\,dt &= v_0 \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{m}\,t} \\ s - s_0 &= \frac{m\,v_0}{\mu}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\mu}{m}\,t}\right) \quad . \end{aligned}$$

O corpo se aproxima da posição $s_0 + \dfrac{m\,v_0}{\mu}$.

4.2 Força Dependente da Posição; Teorema da Energia Cinética

A resolução do problema da força dependente da posição—ou seja, achar a equação horária de um corpo sujeito a uma força dependente da posição—contém, além de duas integrações, transformações algébricas notáveis que estudaremos em seguida. Dessas transformações resultam os conceitos de *energia cinética*, *trabalho* e *energia potencial*, cujas definições são algébricas. As seções **4.4** e **4.5** discutem esses conceitos visando a sua utilização em problemas específicos.

Uma força dependente da posição é escrita como

$$m\,a = f(s) \quad .$$

Não é possível integrar ao longo da variável t. Multipliquemos ambos os membros pelo diferencial ds e integremos.

$$\begin{aligned} m\,\frac{dv}{dt}\,ds &= f(s)\,ds \\ \int_{v_0}^{v} v\,dv &= \int_{s_0}^{s} f(s)\,ds \\ \frac{1}{2}\,m\,v^2 \Big|_{v_0}^{v} &= \int_{s_0}^{s} f(s)\,ds \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 = \mathcal{T}} \quad .$$

Tem-se as definições de energia cinética e trabalho.

A quantidade $\frac{1}{2}mv^2$ é denominada *energia cinética* ($e_{\text{cinética}}$) do corpo.

A integral da força ao longo do caminho é denominada *trabalho* ($\mathcal{T}$).

A igualdade recebe o nome de *Teorema da Energia Cinética* (T.E.C), assim enunciado,

> *A variação da energia cinética de um corpo é igual ao trabalho realizado pela força (resultante) sobre ele aplicada.*

O teorema fornece a velocidade em função da posição. Para obtermos a posição em função do tempo prosseguimos com a álgebra e outra integração,

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \sqrt{v_0^2 + \tfrac{2}{m}\mathcal{T}} \\
\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\mathcal{T}}} &= \int_{t_0}^{t} dt \\
t &= t_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\mathcal{T}}} \ .
\end{aligned}$$

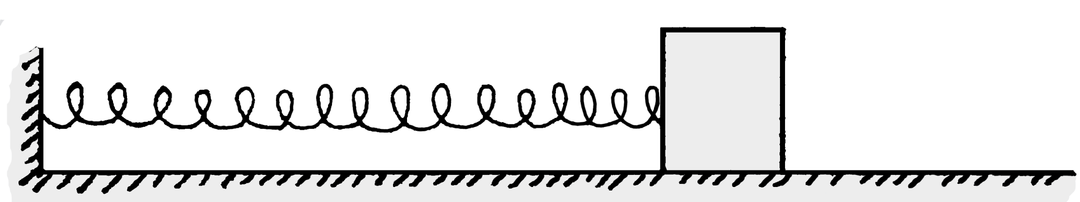
É o tempo em função da posição, que por inversão algébrica fornece a posição em função do tempo.

Exemplos de força dependente da posição são a atração gravitacional e a força elástica. Quanto à atração gravitacional pode-se obter a posição de um planeta a partir da lei do inverso do quadrado da distância. Mais interessante neste caso é obter a distância em função do ângulo, que é a *equação da órbita*. Esta dedução, feita inicialmente por Newton, encontra-se além do escopo do presente texto, e sobre o assunto pode-se consultar por exemplo Herbert Goldstein: *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, capítulo 3; trata-se de um texto mais avançado.

O exemplo da força elástica é apresentado a seguir.

4.3 Oscilador Harmônico

Vejamos a dedução da equação horária de um sistema mola linear - massa, no qual o corpo está sujeito a uma força elástica, ou de restituição linear. O resultado será uma oscilação harmônica.



$$m\,a = -\,\mathrm{K}\,s \qquad \text{(Atrito nulo.)}$$

$$\begin{aligned}
m\,\frac{dv}{dt}\,ds &= -\,\mathrm{K}\,s\,ds \\
m\int_{v_0}^{v} v\,dv &= -\int_{s_0}^{s}\mathrm{K}\,s\,ds \\
\frac{1}{2}\,m\,v^2-\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 &= -\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{K}\,s^2-\frac{1}{2}\,\mathrm{K}\,s_0^2\right)\ .
\end{aligned}$$

Como veremos na seção **4.5** a quantidade $\frac{1}{2}\,\mathrm{K}\,s^2$ é a energia potencial associada à força elástica (veja-se a página 109). Continuando,

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{\frac{\mathrm{K}}{m}}\sqrt{\frac{m}{\mathrm{K}}v_0^2+s_0^2-s^2} \\
\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{m}}\sqrt{\frac{m}{\mathrm{K}}v_0^2+s_0^2-s^2}} &= \int_{t_0}^{t} dt\ .
\end{aligned}$$

A quantidade $\frac{m}{\mathrm{K}}v_0^2+s_0^2$ é uma constante, que denotaremos por A^2. Veremos adiante que A é a amplitude de uma oscilação.

$$t = \sqrt{\frac{m}{\mathrm{K}}}\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\mathrm{A}\sqrt{1-\frac{s^2}{\mathrm{A}^2}}}\ .$$

Fazendo a substituição $\frac{s}{\mathrm{A}} = \mu$ temos

$$t = \sqrt{\frac{m}{\mathrm{K}}}\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\ .$$

E fazendo $\mu = \mathrm{sen}\varphi$,

$$\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{m}{\mathrm{K}}}\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \\
&= \sqrt{\frac{m}{\mathrm{K}}}\,(\varphi-\varphi_0)\ ;
\end{aligned}$$

a quantidade φ é denominada *fase* do movimento. Escrevamos φ em função do tempo,

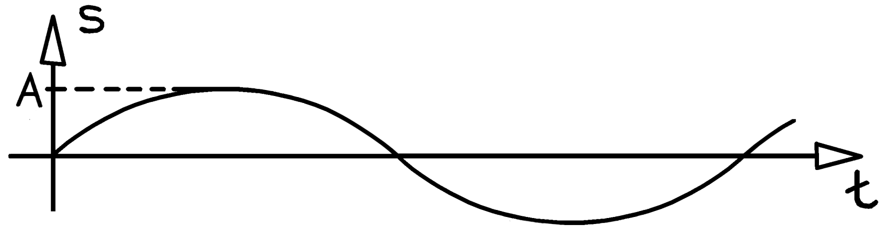
$$\varphi = \sqrt{\frac{\mathrm{K}}{m}}\,t+\varphi_0\ .$$

Recompondo as substituições feitas teremos

$$\begin{aligned}
\mu &= \mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{m}}\,t+\varphi_0\right) \\
s &= \mathrm{A}\ \mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{m}}\,t+\varphi_0\right)
\end{aligned}$$

onde $\mathrm{A} = \sqrt{\frac{m}{\mathrm{K}}v_0^2+s_0^2}$ e $\varphi_0 = \mathrm{arcsen}\frac{s_0}{\mathrm{A}}$.

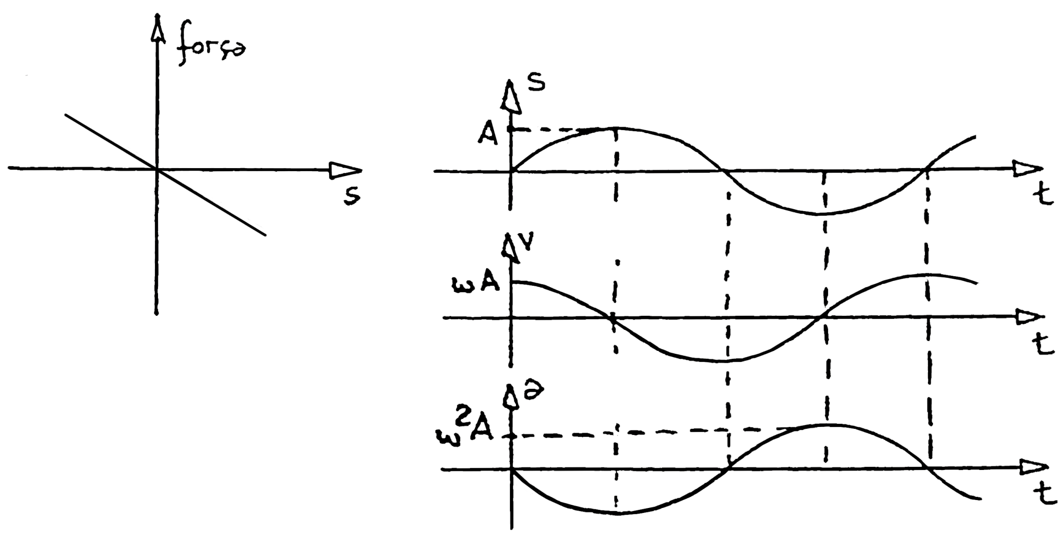
Trata-se da equação horária de uma oscilação. Concluímos que um corpo sujeito a força de restituição linear oscila harmônicamente, em torno da posição de equilíbrio. Utilizamos a palavra *harmônico* para nos referirmos à função seno, ou à função cosseno, que descreve o movimento. Este é o *movimento harmônico simples*, que contém oscilações de uma única frequência. Segue o gráfico horário (para $\varphi_0 = 0°$).



A distância s do corpo à posição de equilíbrio recebe o nome de *elongação*. A elongação máxima é a *amplitude* (A) da oscilação. A velocidade angular (ω, página 44) com que a fase varia é $\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{m}}$ e a frequência é $\frac{1}{2\pi\,\text{radianos}}\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{m}}$. Podemos escrever

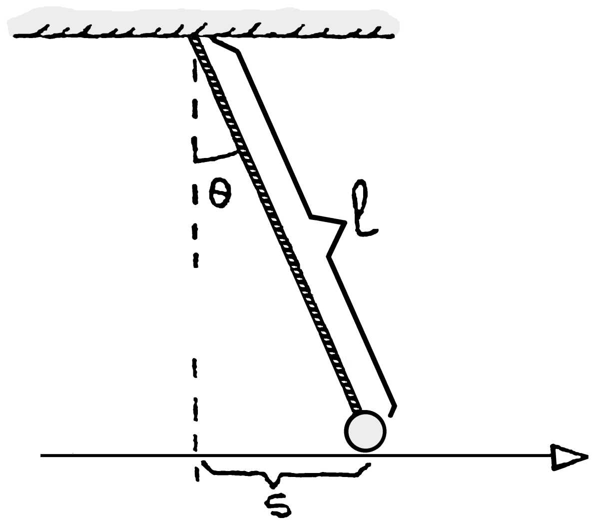
$$\begin{aligned} v &= \omega\,\mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi_0) \\ a &= -\,\omega^2\mathrm{A}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) \\ v &= \pm\,\omega\sqrt{\mathrm{A}^2 - s^2}\ ; \end{aligned}$$

a velocidade máxima é ωA e a aceleração máxima é ω^2A. Alguns gráficos relativos ao movimento, com $\varphi_0 = 0$, são os seguintes[38].



Um pêndulo simples, que é constituído por um corpo pendurado em uma corda de comprimento constante e massa desprezível, obedece a uma lei de restituição linear quando os deslocamentos a partir da posição de equilíbrio são pequenos. De fato, a força de restituição é $-\,mg$ senθ mas para ângulos pequenos tem-se sen$\theta \simeq \dfrac{s}{l}$ (ver figura; m é a massa do corpo, θ é o ângulo, l é o comprimento da corda e s é o deslocamento).

[38]Os gráficos de energia encontram-se à página 109.



Temos assim

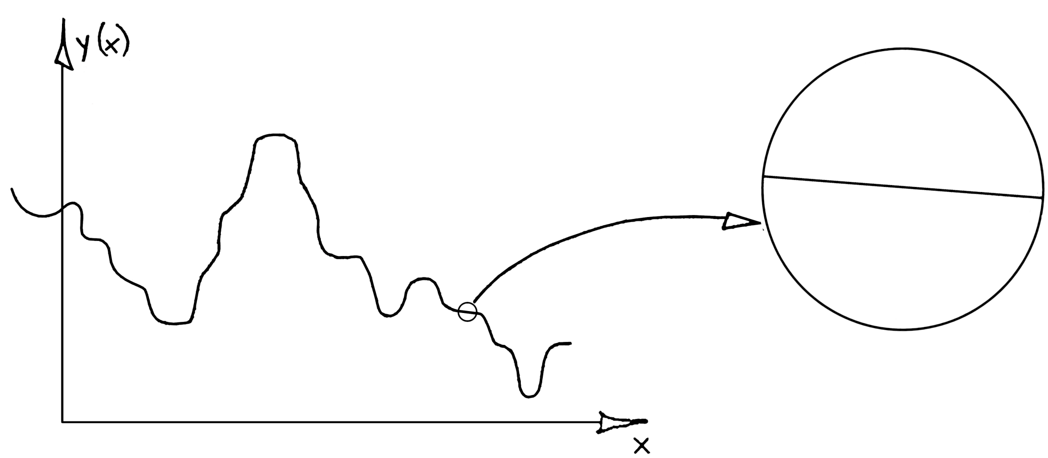
$$m\,a \simeq -m\,\frac{g}{l}\,s \ .$$

Por comparação com o sistema mola-massa (página 98) a equação horária das pequenas oscilações poderá ser escrita como

$$s = \mathrm{A}\ \mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \varphi_0\right)$$

com frequência $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

Um corpo sujeito a uma força de restituição não linear também oscila, mas o movimento é descrito por uma função mais complicada. Entretanto, para variações suficientemente pequenas qualquer função $y(x)$ contínua, com derivada contínua, pode ser aproximada por uma relação linear. Este fato é descrito algébricamente por uma *expansão em série* da função, que é assunto dos livros elementares de cálculo. Limitar-nos-emos aqui a uma ilustração gráfica.



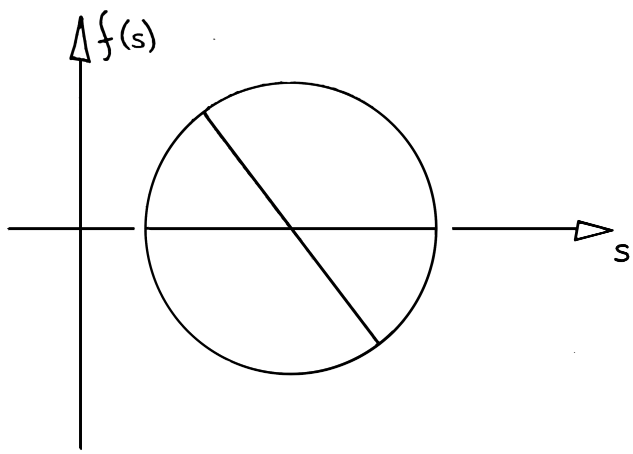
O coeficiente angular[39] da reta que representa a curva na região próxima ao ponto considerado é a derivada $\frac{dy}{dx}$ naquele ponto. Um corpo sujeito a uma força de restituição

[39]Numa relação linear $y = a\,x + b$, o coeficiente a é chamado *angular* e b é o *coeficiente linear*.

qualquer $f(s)$ e que oscila em torno da posição de equilíbrio com deslocamentos s suficientemente pequenos obedece a uma lei de força

$$m\,a \simeq \left.\frac{df}{ds}\right|_{s_{\text{equilíbrio}}} .\, s \qquad .$$

Segue o gráfico (o círculo representa que se tem desenhado em escala ampliada em torno da posição de equilíbrio).



O movimento é harmônico simples (a menos de pequenos desvios) sendo sua frequência igual a

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{-\left.\dfrac{df}{ds}\right|_{s_{\text{equilíbrio}}}}{m}} \qquad .$$

Em outras palavras *toda pequena oscilação é harmônica* (a menos de pequenos desvios).

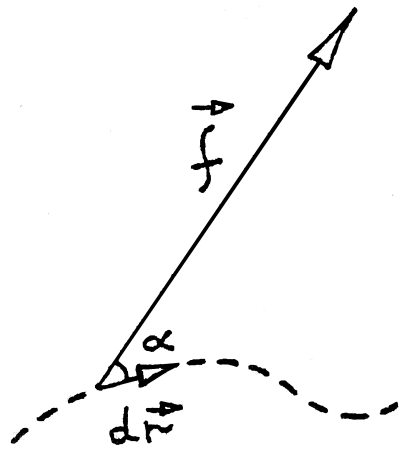
4.4 Trabalho

O conceito de trabalho é utilizado para calcular a variação do módulo da velocidade de um corpo que está sujeito a uma força dependente da posição. Ele é igual à variação da energia cinética do corpo. Serão repetidas aqui as definições já apresentadas na seção **4.2**, incluindo o trabalho de um vetor força (num espaço bi ou tridimensional).

O trabalho $\mathcal{T}$ realizado por uma força é a integral ao longo do caminho percorrido da projeção da força na direção do deslocamento,

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} f \cos\alpha \;\, dr \quad ,$$

onde α é o ângulo entre as direções da força e do deslocamento.



Isto é o mesmo que (página 17)

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{f}(\vec{r}) \, . \, d\vec{r} \ \ .$$

Note-se que caso a força aplicada seja perpendicular ao deslocamento não há realização de trabalho. Uma força resultante centrípeta não altera a velocidade do corpo.

A *energia cinética* ($e_{\text{cinética}}$, $e_{\text{cin.}}$) de um corpo é metade do produto da massa pelo quadrado da velocidade do corpo,

$$\frac{1}{2} m \, v^2 \ \ .$$

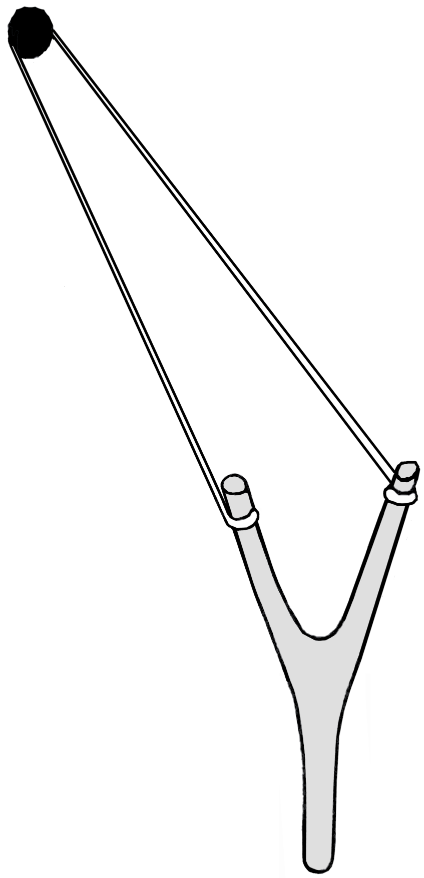
A variação da energia cinética é igual ao trabalho realizado pela força (resultante),

$$\boxed{\frac{1}{2} m \, v^2 - \frac{1}{2} m \, v_0^2 \ = \int_{s_0}^{s} f \, ds}$$

escrito aqui para o caso de movimento unidimensional. É o *Teorema da Energia Cinética* (T.E.C.) que, como já foi dito (página 97), se presta a calcular o módulo da velocidade quando se conhece a força em função da posição.

A unidade de energia ou trabalho no sistema *mks* é o newton.metro, denominado *joule*, e abreviado J. No sistema *cgs* a unidade é o dina.centímetro, denominado *erg*. Um joule é igual a 10^7 ergs.

Problema 42



A força sobre um pedra que é lançada por um estilingue é igual a

$$80\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\,(s - 0{,}3\,\mathrm{m})^2$$

onde s é o espaço percorrido desde o ponto de partida. O comprimento percorrido até que a borracha do estilingue se afrouxe (e não exerça então mais força sobre a pedra) é 0,3 m. A massa da pedra é 0,01kg. Calcule a velocidade com que a pedra sai do estilingue.

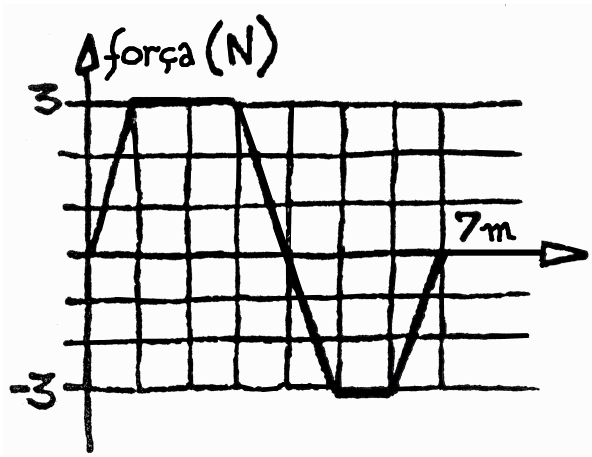
$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 = \int_{0\,\mathrm{m}}^{0{,}3\,\mathrm{m}} f\,ds$$

$$\frac{1}{2}\,0,01\,v^2 = \int_0^{0{,}3} 80\,(s - 0{,}3)^2\,ds \qquad (v_0 \text{ é nulo.})$$

Tomando $u = s - 0,3\,;\, \frac{ds}{du} = 1\,;$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,0,01\,v^2 &= 80\int_{-0{,}3}^{0} u^2\,du \\ &= 80\,\left.\frac{u^3}{3}\right|_{-0{,}3}^{0} = 0,72 \\ v &= 12\,\mathrm{m/s}\;. \end{aligned}$$

Problema 43



O valor da componente de uma força aplicada sobre um corpo ao longo de uma direção está expresso no gráfico ao lado. Calcule o trabalho realizado pela força quando o corpo se move naquela direção de 0 m até 3 m, e também de 3 m até 6 m.

O trabalho realizado é a área sob o gráfico força x posição. Temos aqui triângulos e retângulos.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{0\,\mathrm{m},\,3\,\mathrm{m}} &= \frac{1\,.\,3}{2} + 2\,.\,3 \\
&= 7,5\,\mathrm{J} \quad .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{3\,\mathrm{m},\,6\,\mathrm{m}} &= \frac{1\,.\,3}{2} - \frac{1\,.\,3}{2} - 1\,.\,3 \\
&= -3\,\mathrm{J} \quad .
\end{aligned}$$

4.5 Energia Potencial

O conceito de energia potencial deve ser apresentado em conexão com a conservação da energia.

Conservação da Energia Mecânica

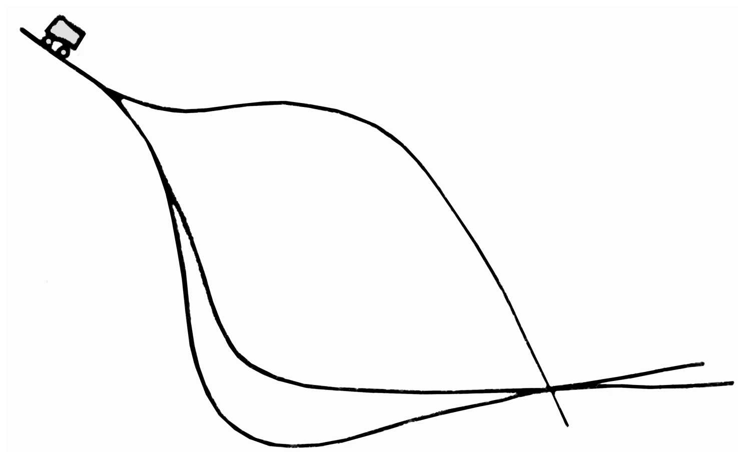
O teorema da energia cinética estabelece que a variação do módulo da velocidade de um corpo é determinado pelo trabalho realizado pela força resultante aplicada sobre o corpo (página 102). Desde que o trabalho é uma integral ao longo do caminho é necessário conhecer a força em função da posição.

Num sistema unidimensional, se a força depende apenas da posição—não depende por exemplo do sentido de movimento, da velocidade, ou de outra grandeza—pode-se definir uma energia para cada posição, como sendo o trabalho da força desde uma posição de referência (escolhida) até a posição considerada. De fato, inclui-se (como descrito a seguir) um *sinal negativo* nessa definição—é a *energia potencial*—o que permitirá conceituar a *conservação da energia mecânica.*

Num sistema bi ou tridimensional a definição de energia potencial exige também que o trabalho *não dependa do caminho*.

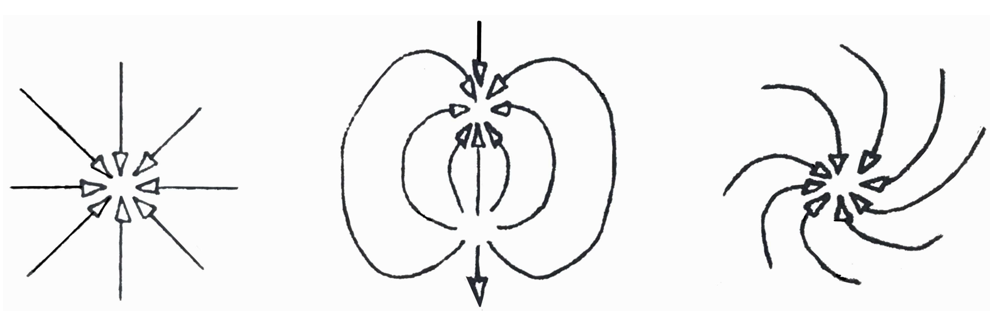
Existem forças dependentes da posição (entre elas a força gravitacional, a força eletrostática e a força elástica) em que o trabalho realizado sobre o corpo depende apenas das posições final e inicial do corpo e não depende do caminho percorrido. Isto significa que, qualquer que seja o caminho, a velocidade final do corpo (em módulo) será a mesma (tendo partido com a mesma velocidade inicial).

Por exemplo, se um carrinho desliza com atrito desprezível entre dois pontos de alturas diferentes sobre a superfície da Terra, a velocidade final (em módulo) depende apenas da diferença de alturas.



O fato se deve a uma característica geométrica da força em cada ponto do espaço. Para se visualizar vejamos o conceito de *campo de forças*. Existe um campo de forças numa região do espaço quando está determinada uma força para cada ponto daquela região, força esta que passará a existir desde que se coloque naquele ponto um corpo para receber sua ação. O conceito de *campo* é o próprio conceito de função da posição, apenas enfatizando o seu caráter geométrico. Quando um corpo (*agente*) aplica sobre um segundo corpo uma força podemos considerar que o primeiro cria no espaço um campo de forças. Sob este ponto de vista, para calcular a força determinamos primeiramente o valor do campo na posição de interesse e em seguida obtemos a força sobre o corpo ali colocado. Por exemplo, o campo gravitacional na superfície da Terra é um vetor de módulo 9,8 newtons/kg, direção vertical e sentido para o centro do planeta (é habitualmente denotado por $\vec{g}$). Multiplicando-o pela massa do corpo tem-se o peso.

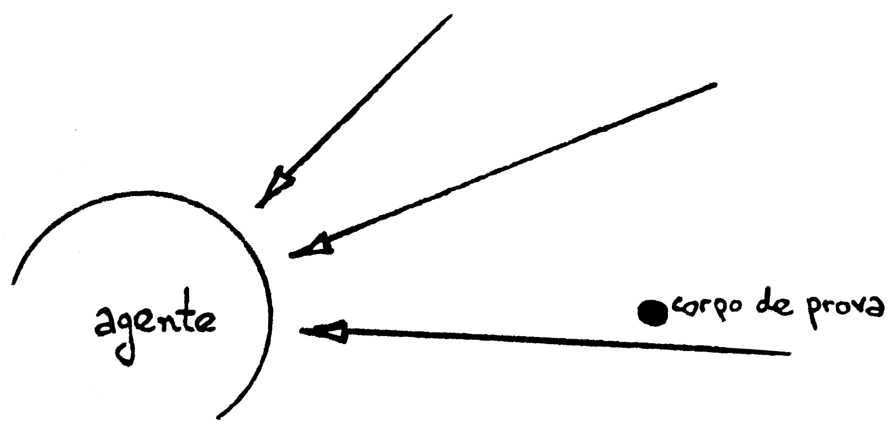
Um campo de forças é representado geometricamente por um conjunto de linhas que têm em cada ponto a direção da força; veja-se exemplos. Essa representação enfatiza suas características geométricas.



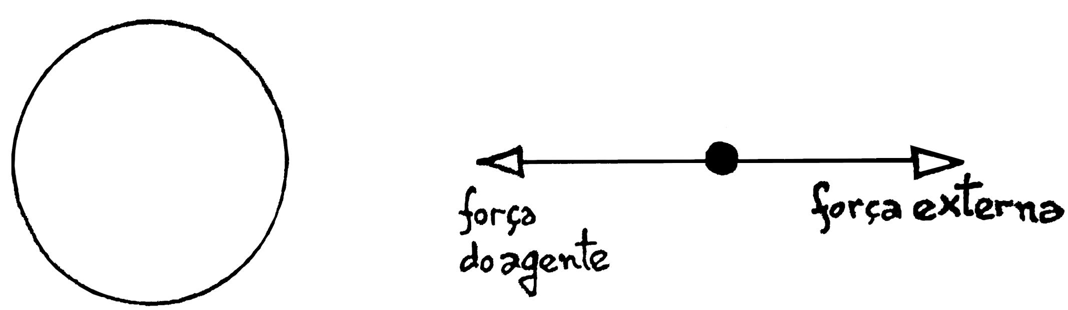
Observe-se como as linhas da figura à direita *enrolam* em torno de cada ponto[40]. Quando tal acontece o trabalho depende do caminho[41].

Se o corpo se move no interior de um campo com a característica de *não enrolar* (rotacional nulo) o trabalho não depende do caminho. Chamamos tal campo de *conservativo* (porque, como veremos, ocorre a conservação da energia mecânica). No caso de campo conservativo define-se a *energia potencial* do sistema em cada posição do corpo.

Considere-se um sistema conservativo cosntituído de um corpo agente da força e um corpo de prova sobre o qual a força é aplicada.



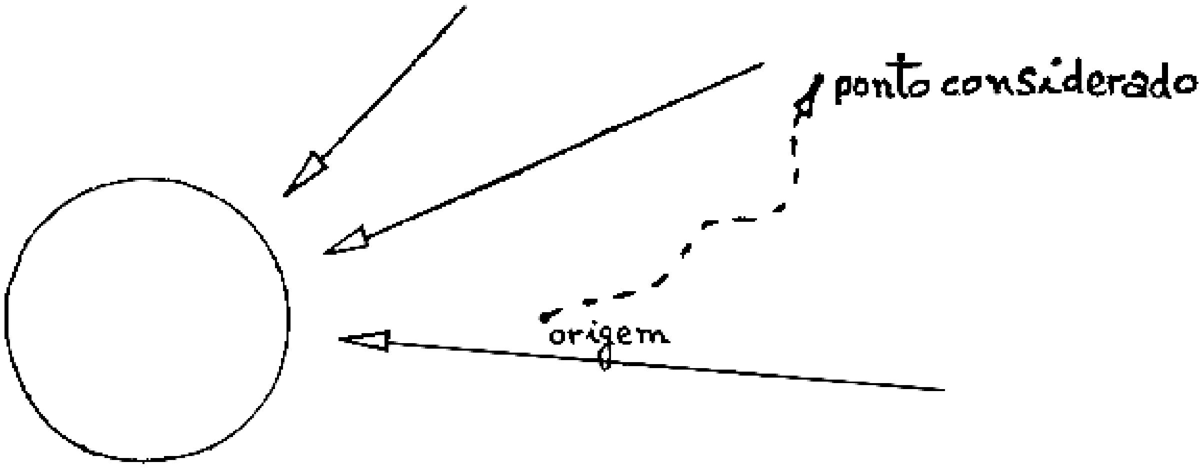
Para que o corpo de prova permaneça em equilíbrio é necessário existir uma força externa ao sistema aplicada sobre o corpo, de módulo e direção iguais ao da força aplicada pelo agente mas de sentido contrário; como na figura.



Convencionemos uma posição como sendo a origem e convencionemos um valor para a energia potencial na origem. *Energia potencial* ($e_{\text{potencial}}$, $e_{\text{pot.}}$) do sistema em uma posição do corpo é a energia potencial convencionada na origem ($e_{\text{potencial}_0}$) mais o trabalho realizado pela força externa para levar o corpo desde a origem até o ponto considerado.

[40]Esta característica é descrita algebricamente pela função *rotacional* do campo, estudada em textos de cálculo vetorial.

[41]Por exemplo, se o (segundo) corpo dá uma volta em torno do centro sobre ele é realizado um determinado trabalho, se—em novo caminho—der duas voltas com a mesma trajetória o trabalho será o dobro; etc..



$$e_{\text{potencial}}(\vec{r}) \;=\; e_{\text{potencial}\,0} + \mathcal{T}_{\text{força externa sobre o corpo}} \quad .$$

É a energia que se coloca no sistema.

Como o trabalho não depende do caminho a grandeza fica univocamente determinada em cada posição. A energia potencial assim definida permite que o teorema da energia cinética seja escrito (no caso de forças conservativas) na forma de uma conservação da energia. Escrevamos a energia em termos do trabalho da força do próprio sistema. Desde que $\mathcal{T}_{\text{força externa}} \;=\; -\mathcal{T}_{\text{força do agente}}$ temos

$$\boxed{e_{\text{potencial}}(\vec{r}) \;=\; e_{\text{potencial}\,0} - \mathcal{T}_{\text{força do agente sobre o corpo}}} \quad .$$

Portanto

$$\mathcal{T}_{\text{força do agente}} \;=\; -\left(e_{\text{potencial}} - e_{\text{potencial}\,0}\right)$$

e o teorema da energia cinética se torna

$$e_{\text{cinética}} - e_{\text{cinética}\,0} \;=\; -\left(e_{\text{potencial}} - e_{\text{potencial}\,0}\right)$$

$$\boxed{e_{\text{cinética}} + e_{\text{potencial}} \;=\; e_{\text{cinética}\,0} + e_{\text{potencial}\,0}} \quad .$$

Esta soma de energia cinética e energia potencial recebe o nome de *energia mecânica* ($e_{\text{mecânica}}$) do sistema. É grandeza conservada durante o movimento dos corpos de um sistema isolado no qual as forças são conservativas. Trata-se da *Conservação da Energia Mecânica.*

$$\boxed{e_{\text{mecânica final}} \;=\; e_{\text{mecânica inicial}}} \quad .$$

O movimento acontece de tal modo que ao final a energia mecânica é a mesma que existia no início.

Energias Potenciais de Alguns Sistemas

É frequente considerar nula a energia potencial do sistema na origem ($e_{\text{potencial}_0} = 0$). Com isto temos no caso unidimensional

$$e_{\text{potencial}} = -\int_{s_0}^{s} f(s)\, ds \ .$$

Estudemos alguns sistemas com forças conservativas.

- Força peso proporcional ao inverso do quadrado da distância.

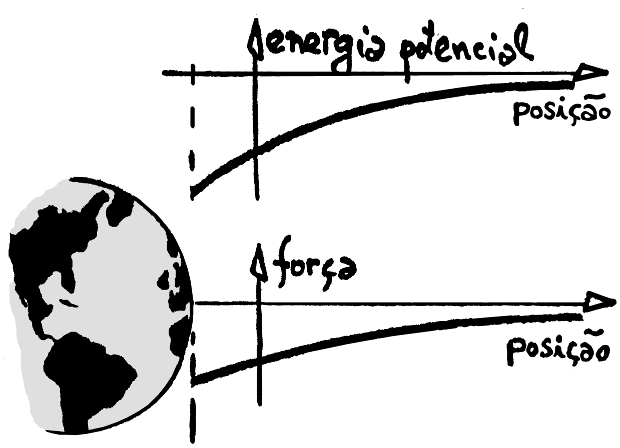
$$m\, a = -\mathrm{K}\, \frac{m}{r^2}$$

onde K é g multiplicado pela massa do planeta. Daí

$$\begin{aligned} e_{\text{potencial}} &= \mathrm{K}\, m \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2} \\ &= \mathrm{K}\, m \left| -\frac{1}{r} \right|_{r_0}^{r} \ . \end{aligned}$$

Consideremos como origem da energia potencial um ponto no infinito. Desse modo a energia potencial num ponto distante é nula e torna-se negativa ao nos aproximarmos do planeta.

$$e_{\text{potencial}} = -\mathrm{K}\, \frac{m}{r} \ .$$

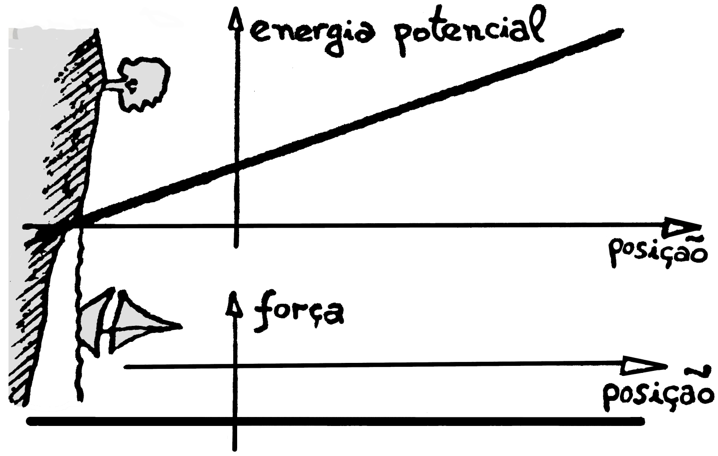


- Força peso constante (para movimentos nas proximidades da superfície da Terra a força peso pode ser considerada constante).

$$\begin{aligned} m\, a &= -m\, g \\ e_{\text{potencial}} &= -\int_0^h -m\, g\, dh \end{aligned}$$

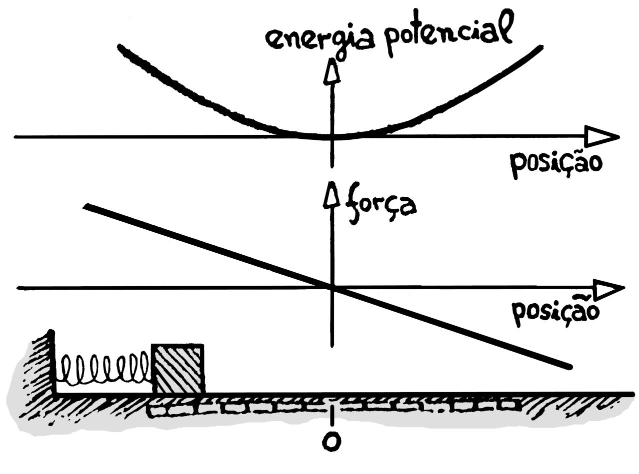
(h é altura; a origem é o chão).

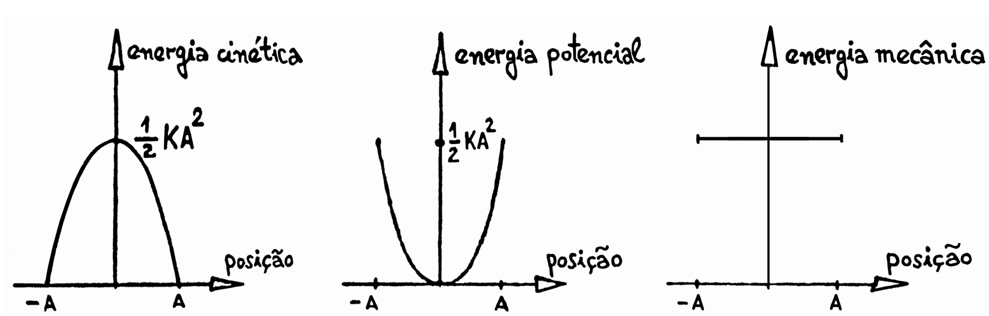
$$e_{\text{potencial}} = m\, g\, h \ .$$



- Força de restituição linear.

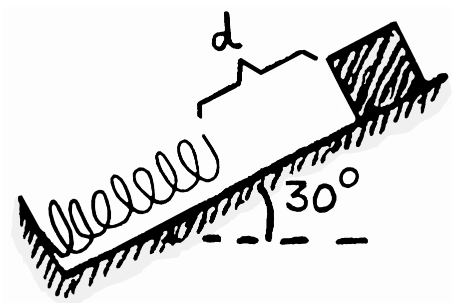
$$
\begin{aligned}
m\,a &= -\,\mathrm{K}\,s \\
e_{\text{potencial}} &= -\int_0^s -\,\mathrm{K}\,s\,ds \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{K}\,s^2 \quad .
\end{aligned}
$$





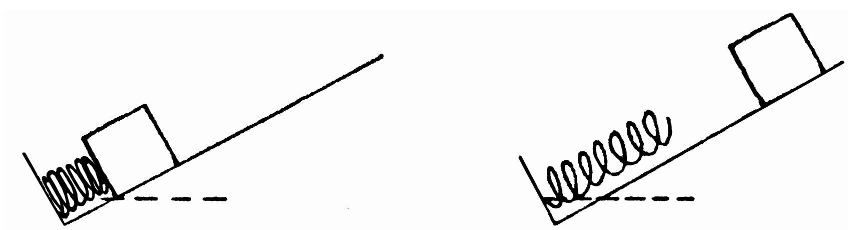
A energia mecânica do oscilador é $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{K}\,\mathrm{A}^2$.

Problema 44



Um bloco de massa 1 kg é abandonado com velocidade inicial nula sobre um plano de inclinação 30° com a horizontal, numa posição situada a uma distância (d) de 1,2 m acima de uma mola de constante elástica 2,5 10^3 N/m (ver figura). O atrito com o plano é desprezível. Calcule a deformação máxima que ocorrerá na mola quando o bloco a atingir ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$).

$$e_{\text{final}} \quad = \quad e_{\text{inicial}} \quad .$$



(Considere-se como origem da energia potencial a posição de maior compressão da mola, conforme mostram as figuras.)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\mathrm{K}\,\triangle^2 s &= m\,g\,[(\triangle s + d)\,\mathrm{sen}30°] \\
\frac{1}{2}\,2{,}5\,10^2\,\triangle^2 s &= 1.10\left[(\triangle s + 1,2)\,\frac{1}{2}\right] \\
\triangle s &= 0,071\,\mathrm{m} \quad .
\end{aligned}$$

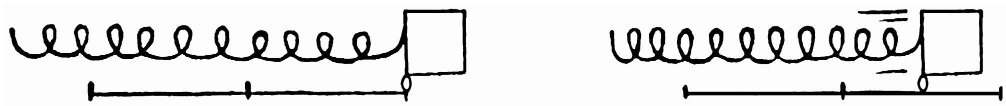
(Existe ainda uma segunda solução, -0,067 m, que corresponde a uma distensão caso fique o bloco preso à mola.)

Problema 45

Um sistema mola linear-massa, com constante elástica 20 N/m e massa 0,0375 kg, é lançado com velocidade 2 m/s a partir de uma posição que dista 5 cm da posição de equilíbrio. Calcule a amplitude da oscilação que ocorrerá em seguida.

Pode-se aplicar a definição da grandeza A (página 98) ou a conservação da energia mecânica,

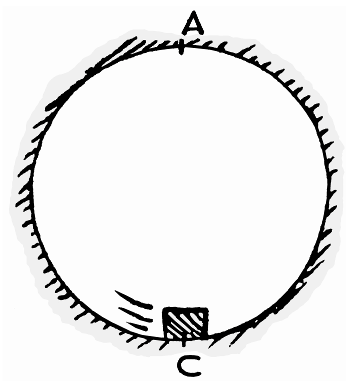
$$e_{\text{final}} = e_{\text{inicial}}$$



$$\frac{1}{2}\,\mathrm{K}\,\mathrm{A}^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{K}\,s_0^2$$

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{m}{\mathrm{K}}v_0^2 + s_0^2} = 0,1\,\mathrm{m} \ .$$

Problema 46



Um corpo é lançado com velocidade inicial v_{C} a partir do ponto mais baixo (ponto C) de um círculo vertical de raio r, sobre sua parte interna. O atrito é desprezível. A aceleração da gravidade é $\vec{g}$. Qual é o mínimo valor de v_{C} para que o corpo passe pelo ponto A sem perder contato com o círculo?

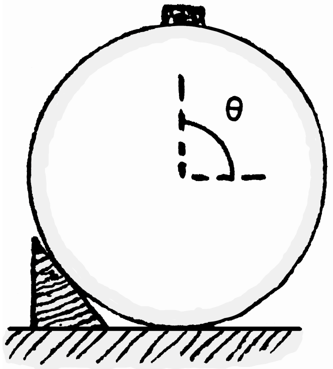
$$e_{\text{final}} = e_{\text{inicial}}$$

$$\frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{A}_{\text{mínima}}}^2 + m\,g\,2r = \frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{C}_{\text{mínima}}}^2 \ .$$

Conforme o resultado do problema 39, página 89, $v_{\mathrm{A}_{\text{mínima}}} = \sqrt{g\,r}$. Daí

$$v_{\mathrm{C}_{\text{mínima}}} = \sqrt{5\,g\,r} \ .$$

Problema 47



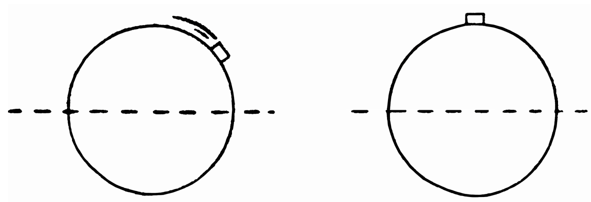
Um pequeno corpo está apoiado sobre o ponto mais alto de um círculo maciço e então escorrega. O círculo permanece fixo, o atrito é desprezível e a aceleração da gravidade é $\vec{g}$. A posição do corpo é indicada por um ângulo com vértice no centro do círculo (ver figura). Determine o ângulo em que o corpo abandona o círculo.

Haverá desprendimento na posição em que a velocidade do corpo, $v(\theta)$, for igual à velocidade máxima naquele lugar. Conforme o problema 40, página 89, a velocidade máxima é $\sqrt{g\,r\;\mathrm{sen}\theta}$.

$$v(\theta) = v_{\text{máxima}}(\theta)$$

Calculemos $v(\theta)$.

$$e_{\text{final}} = e_{\text{inicial}}$$



$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,r\;\mathrm{sen}\theta = m\,g\,r$$

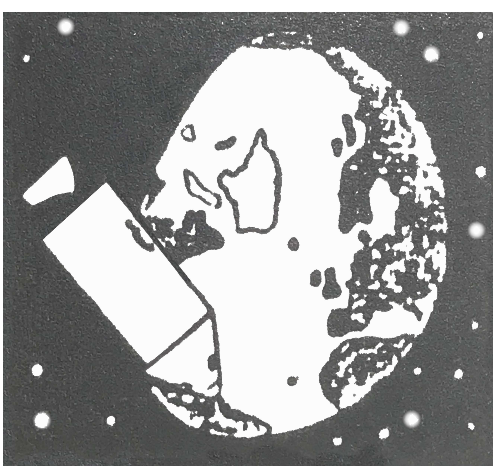
$$v = \sqrt{2\,g\,r\,(1 - \mathrm{sen}\theta)}\ .$$

$$\sqrt{2\,g\,r\,(1 - \mathrm{sen}\theta)} = \sqrt{g\,r\;\mathrm{sen}\theta}$$

$$\theta = \mathrm{arcsen}\frac{2}{3}$$

$$= 41^\circ\ 48'\ 37''\ .$$

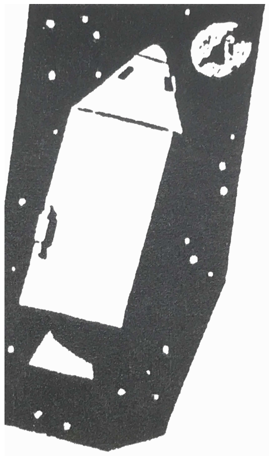
Problema 48

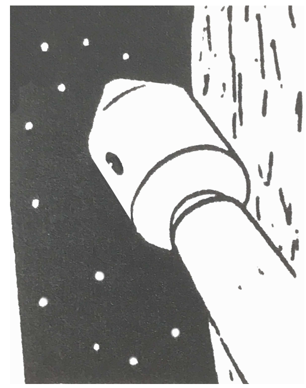


Calcule a velocidade de escape na superfície da Terra. O raio da Terra é 6 371 km e g vale 9,8 m/s^2.

A velocidade de escape é a velocidade mínima que um corpo deve ter para se afastar definitivamente do planeta.

Na situação final o corpo estará muito longe da Terra, parado em relação a ela (no caso de ter saído do planeta com a velocidade mínima). Na situação inicial ele está perto, com velocidade de escape.





$$
\begin{aligned}
e_{\text{final}} &= e_{\text{inicial}} \\
0 &= \frac{1}{2}\, m\, v^2_{\text{escape}} - \mathrm{K}\,\frac{m}{r}
\end{aligned}
$$

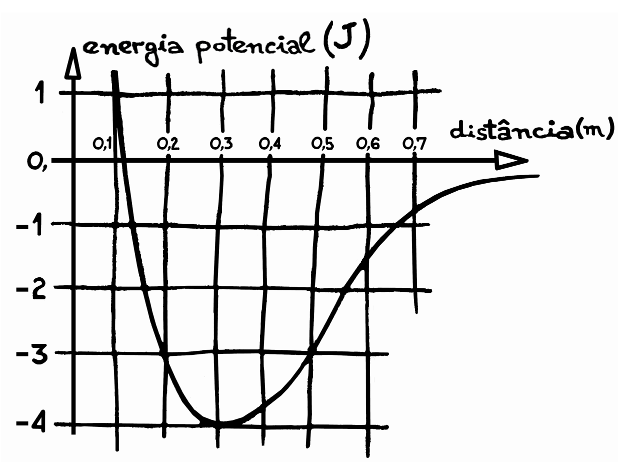
onde utilizaremos a expressão $-\mathrm{K}\,\dfrac{m}{r}$ para a energia potencial gravitacional (página 108). O valor de K para a Terra é calculado a partir do raio e de g.

$$
\begin{aligned}
m\,a &= -\,\mathrm{K}_{\text{Terra}}\,\frac{m}{r^2} \\
-\,9{,}8 &= -\,\mathrm{K}_{\text{Terra}}\,\frac{1}{(6{,}371.10^6)^2} \\
\mathrm{K}_{\text{Terra}} &= 3{,}99\,.10^{14}\,\mathrm{m^3/s^2}\ .
\end{aligned}
$$

Daí

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{v^2_{\text{escape}}}{2} - \frac{3{,}99.10^{14}}{6{,}371.10^6} \\
v_{\text{escape}} &= 11{,}2\,.10^3\,\mathrm{m/s}\ .
\end{aligned}
$$

Problema 49



Um corpo de massa 0,08 kg interage com outro corpo ao longo de uma direção, de modo que a energia potencial em função da distância entre os corpos obedece ao gráfico ao lado, tendendo a zero para distâncias grandes. Indique as regiões onde a força é positiva e onde é negativa. Para uma velocidade máxima de 5 m/s, indique qual é a região acessível ao corpo. Calcule a velocidade de escape na posição de equilíbrio.

A força é a derivada da energia potencial em relação à posição, com o sinal trocado[42].

$$f(s) \;=\; -\frac{d\,e_{\text{potencial}}}{ds} \qquad \text{(caso unidimensional).}$$

Portanto a força é positiva na região em que o gráfico da energia potencial é descendente,

$$0 < s < 0,3\,\text{m} \;\; .$$

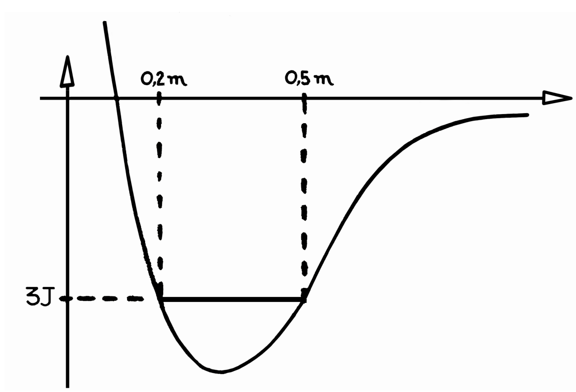
E vice-versa, é negativa na região em que o gráfico é ascendente,

$$s > 0,3\,\text{m} \;\; .$$

O ponto $s \;=\; 0,3\,\text{m}$ é de equilíbrio, do tipo estável[43]. Dada a velocidade máxima, para achar a região acessível calculamos a energia mecânica. No ponto de equilíbrio temos

$$\begin{aligned} e_{\text{cinética}} + e_{\text{potencial}} &= \frac{1}{2}\,m\,v^2_{\text{máxima}} - 4\,\text{joules} \\ &= \frac{1}{2}\,8.10^{-2}.\,5^2 - 4 \\ &= -3\,\text{joules} \end{aligned}$$

e a partir do gráfico



concluímos que a região acessível é

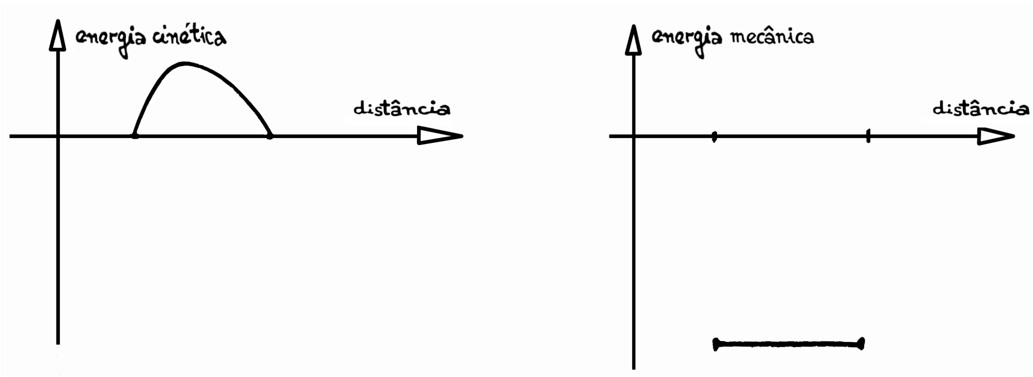
$$0,2\,\text{m} \leq s \leq 0,5\,\text{m} \;\; .$$

[42] Derivando ambos os membros de $e_{\text{potencial}} \;=\; e_{\text{potencial}\,0} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{f}(\vec{r})\,.\,d\vec{r}$ (páginas 107 e 108) em relação à posição obtém-se, no caso mencionado, a expressão do texto.

[43] Há três tipos de equilíbrio,

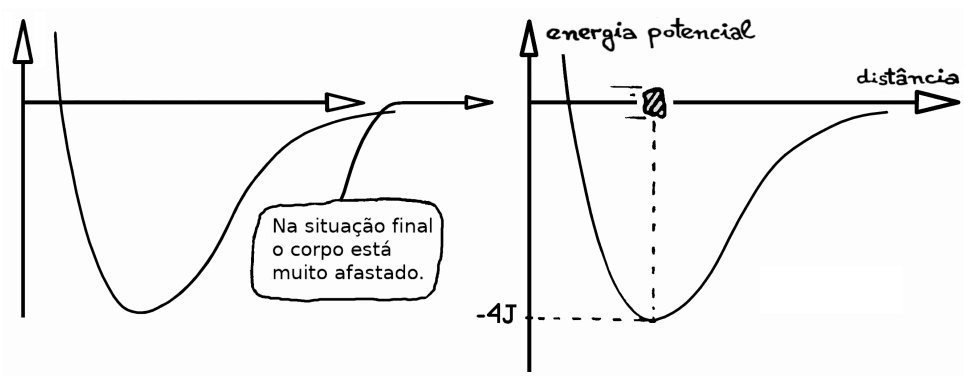
1. *estável*; o corpo tende a retornar quando é deslocado ligeiramente da posição; ocorre nos mínimos de energia potencial; $\frac{d^2 e_{\text{potencial}}}{ds^2}$ é positiva, a força é de restituição; é um *fundo de poço* da energia potencial;
2. *instável*; o corpo tende a se afastar; ocorre nos máximos de energia potencial; $\frac{d^2 e_{\text{potencial}}}{ds^2}$ é negativa;
3. *indiferente*; ocorre nas regiões em que a energia potencial é constante.

Tem-se os gráficos das energias cinética e mecânica.



Por outro lado para calcular a velocidade de escape (veja também o problema anterior) faremos

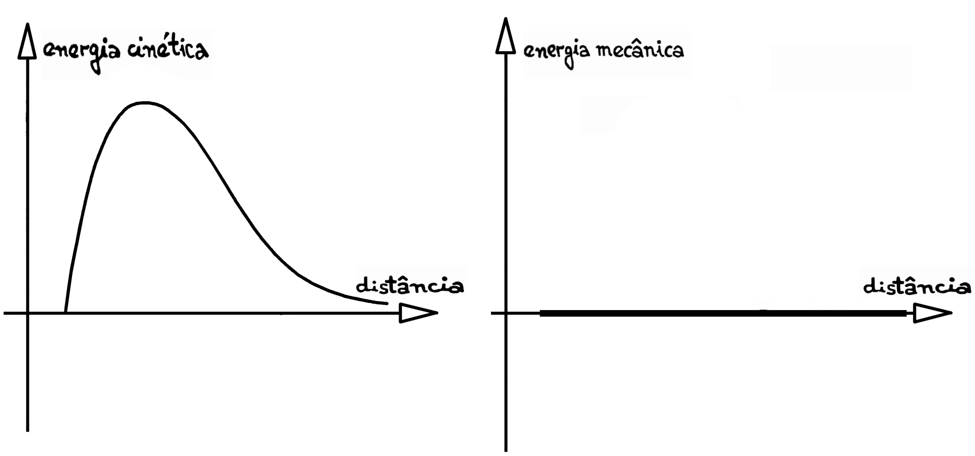
$$e_{\text{final}} = e_{\text{inicial}}$$



$$0 = \frac{1}{2}\, 8.10^{-2}.\, v_{\text{escape}}^2 - 4\,\text{joules}$$

$$v_{\text{escape}} = 10\,\text{m/s} \quad .$$

Neste caso temos os gráficos que seguem.



4.6 Conservação da Energia Total

A força de atrito é não conservativa, de modo que o seu trabalho não pode ser escrito na forma de uma diferença de energias potenciais. Quando um sistema possui atrito entre superfícies que se deslocam uma em relação à outra (ou superfície em relação a fluido) o teorema da energia cinética (páginas 102 e 107) será escrito como

$$\begin{aligned} e_{\text{cinética final}} - e_{\text{cinética inicial}} &= \mathcal{T}_{\text{forças conservativas}} + \mathcal{T}_{\text{atrito}} \\ &= -\left(e_{\text{potencial final}} - e_{\text{potencial inicial}}\right) + \mathcal{T}_{\text{atrito}} \\ e_{\text{mecânica final}} - e_{\text{mecânica inicial}} &= \mathcal{T}_{\text{atrito}} \quad . \end{aligned}$$

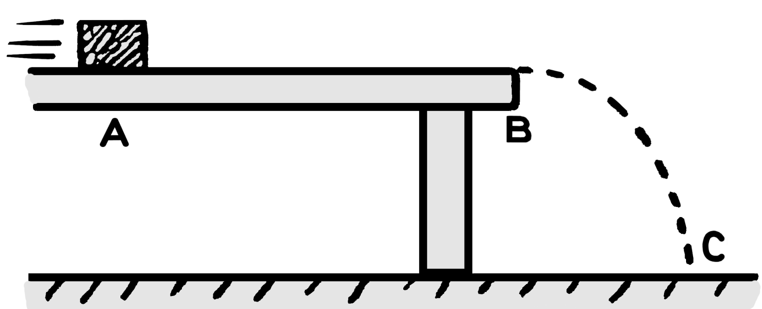
A variação da energia mecânica é igual ao trabalho da força de atrito. Quando o sistema possui superfícies em contato que deslizam o trabalho da força de atrito é negativo porque a força de atrito cinético tem sentido contrário (página 72) ao deslocamento de uma superfície em relação à outra. Deste modo, a energia mecânica diminui.

Por outro lado, quando as superfícies deslizam, o sistema se aquece. Daí nasce o conceito de *energia térmica*, igual em módulo ao trabalho do atrito, e que está contida nos corpos aquecidos. Se somarmos a energia mecânica com a energia térmica—e à soma damos o nome de *energia total*—recompomos a lei de conservação, agora válida para a energia total.

$$e_{\text{mecânica final}} + \left|\mathcal{T}_{\text{atrito}}\right| = e_{\text{mecânica inicial}}$$

$$\boxed{e_{\text{total final}} = e_{\text{total inicial}}} \quad .$$

Problema 50



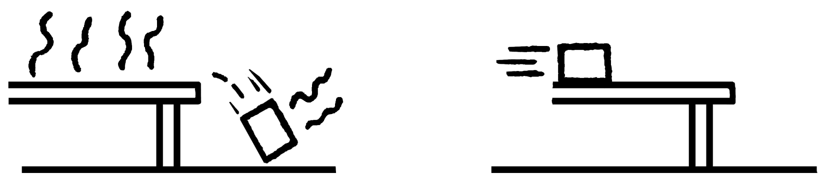
Um corpo é jogado para deslizar sobre uma mesa com velocidade inicial (v_{A}) 4 m/s (ver figura). A distância (l_{AB}) até a borda da mesa é 2 m, o coeficiente de atrito é 0,175, e a altura da mesa é 0,8 m. Verifique inicialmente se o corpo chegará até a borda (com velocidade). Em caso afirmativo calcule a velocidade em módulo com que ele atingirá o chão ($g = 10\,\text{m/s}^2$).

$$\begin{aligned} e_{\text{cinética}_\text{A}} &= \frac{1}{2}\,m\,v_\text{A}^2 & |\mathcal{T}_\text{AB}| &= \mu\,m\,g\,l_\text{AB} \\ &= \frac{1}{2}\,m\,16 & &= 0{,}175\,m\,10\,.\,2 \\ &= m.8\,\text{joules} \ . & &= m.3{,}5\,\text{joules} \ . \end{aligned}$$

A energia cinética em A é maior do que o trabalho da força de atrito em módulo para o corpo se deslocar de A até B.

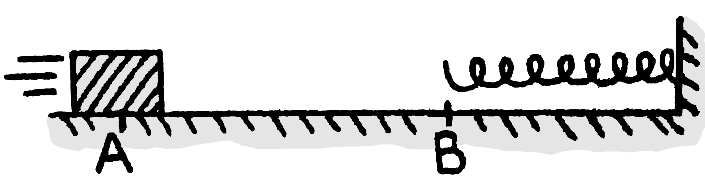
Desse modo atingirá o ponto B e o ultrapassará. Prosseguindo,

$$e_{\text{total final}} = e_{\text{total inicial}}$$



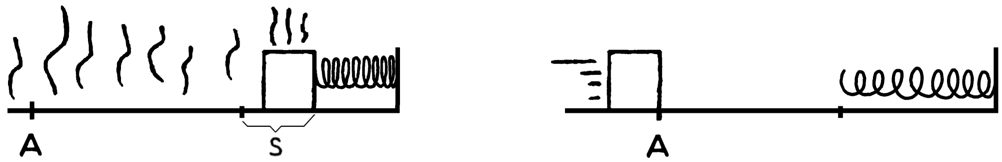
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,m\,v_\text{C}^2 + |\mathcal{T}_\text{AB}| &= \frac{1}{2}\,m\,v_\text{A}^2 + mgh \\ \frac{1}{2}\,v_\text{C}^2 + 3{,}5 &= \frac{1}{2}\,4^2 + 10\,.\,0{,}8 \\ v_\text{C} &= 5\,\text{m/s} \ . \end{aligned}$$

Problema 51



Um bloco de massa 4 kg é lançado com velocidade 6 m/s a partir de um ponto A (na figura) sobre um plano horizontal em direção a uma mola de constante elástica 24 N/m. A distância (l) do ponto A até a mola (ponto B) é 2 m. A força de atrito entre o bloco e o plano tem módulo 20 N. No caso do bloco atingir a mola, qual será sua compressão máxima?

O bloco atingirá a mola já que a energia cinética inicial ($\frac{1}{2}m\,v_\text{A}^2$ ou 72 joules) é maior do que o trabalho em módulo do atrito até atingir a mola (20 N . 2 m, ou 40 joules).



$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,\mathrm{K}\,s^2 + f_{\text{atrito}}\,.\,(l+s) &= \frac{1}{2}\,m\,v_{\mathrm{A}}^2\\[2ex] \frac{1}{2}\,24\,s^2 + 20\,(2+s) &= \frac{1}{2}\,4\,.\,6^2\\[2ex] s &= 1\,\mathrm{m}\ .\end{aligned}$$

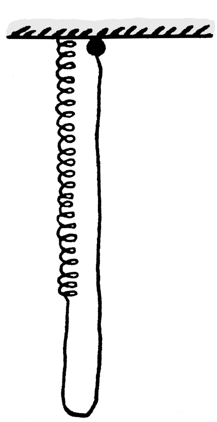
Oito problemas propostos

1 - Um corpo, caminhando numa trajetória retilínea, teve velocidade inicial 27 m/s e sua aceleração é $-6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\,t$. Calcule o espaço percorrido até parar. 54 m.

2 - Qual é a frequência com que oscila um corpo de massa 37,5 g preso a uma mola de constante elástica 20 N/m ? 3,68 Hz.

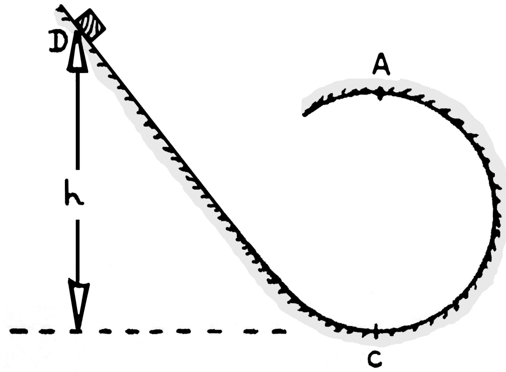
3 - Um corpo de massa 5 kg foi suspenso (por algum mecanismo, guindaste, foquete, etc.) desde o chão até a altura 5 m, com velocidade constante. Calcule ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$)
a) o trabalho da força peso neste percurso,
b) o trabalho da força que suspendeu o corpo,
c) o trabalho total realizado sobre o corpo,
d) a variação de velocidade do corpo e
e) usando o trabalho da força peso e o T.E.C. calcule a velocidade em módulo com que o corpo chegará ao chão se for abandonado dessa altura 5 m. -250 J, 250 J, 0 J, 0 m/s, 10 m/s.

4 -

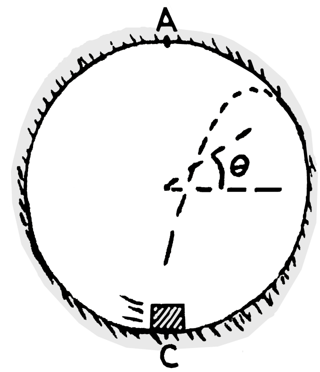


O sistema da figura ao lado é constituído por uma mola de constante elástica 50 N/m e comprimento 16 m (quando relaxada), uma corda de comprimento 32 m e um corpo de massa 0,2 kg. Se abandonarmos o corpo na posição indicada na figura qual será a deformação máxima da mola? ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.) 2 m.

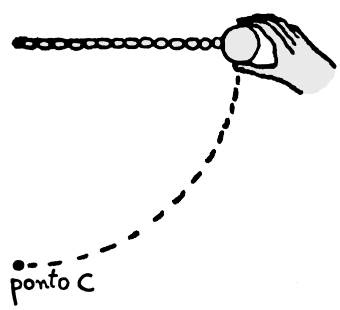
5 - No sistema da figura o corpo foi abandonado ($v_D = 0$) a partir do ponto D. O raio do círculo (vertical) é r. O atrito é desprezível. Calcule a altura h mínima do ponto D (sobre o plano horizontal que contém o ponto C) para que o corpo atinja o ponto A. 2,5 r.



6 - Na situação do problema 46, página 111, o corpo foi lançado a partir do mesmo ponto C mas com velocidade 0,775 $v_{C_{\text{mínima}}}$ (inferior portanto à velocidade mínima para atingir o ponto A). Calcule o ângulo θ (ver figura) em que o corpo irá perder contato com o trilho. 19° 32' 24".



7 - Um pêndulo constituído de uma corda de massa desprezível e de um corpo de peso P foi abandonado de sua posição horizontal com velocidade inicial nula (conforme a figura). Calcule a tensão na corda no ponto C mais baixo da trajetória. 3P.



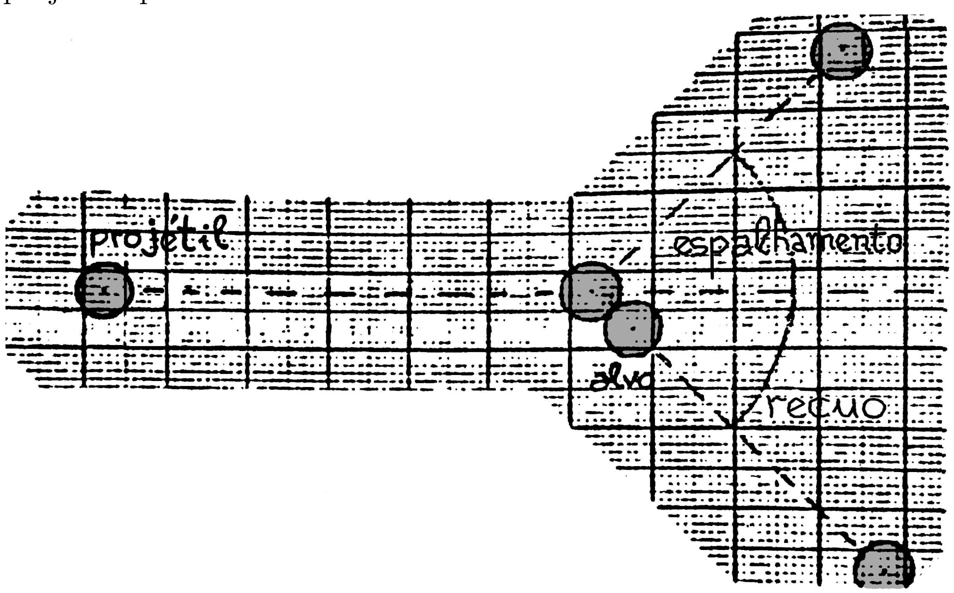
8 - Com respeito ao sistema descrito no problema 51, página 117, pergunta-se
a) Após atingir sua compressão máxima a mola empurrará o bloco de volta?
b) Se o bloco for empurrado de volta chegará ela de novo ao ponto B?
c) Onde parará o bloco? Sim; não; 0,66 m.

Capítulo 5

Colisões

Colisões entre dois corpos são em geral tridimensionais. Mas elas podem ser transformadas em colisão bidimensional com um dos corpos parados—o *alvo*—por uma mudança adequada de referencial[44]. O outro corpo, que atinge, é o *projétil*. O novo referencial, que também é inercial[45], estará solidário a uma das partículas antes (apenas antes) da colisão, esta que funciona como alvo. Deste modo, o estudo das colisões com alvo, que são bidimensionais, é suficiente para descrever todas as colisões.

O projétil espalha e o alvo recua.



Considera-se energia potencial constante.

Posições relativas—que são diferenças de vetores posição—são preservadas em mudanças entre referenciais[46] [47]. As distâncias—módulos das posições relativas—são preservadas.

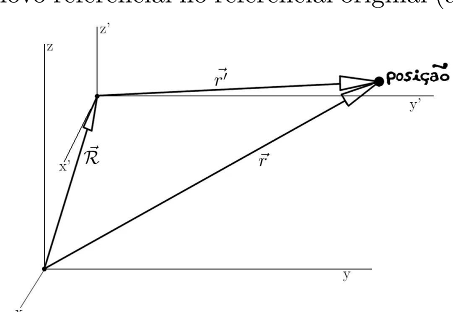
[44]Conceito à página 14.

[45]Conceito à página 49.

[46]Respeitada a limitação fundamental comentada à página 60.

[47]Vetor posição *no* novo referencial (aqui indicado com o superescrito *linha*) é, em cada instante, o vetor posição no referencial original menos o vetor posição *do* novo referencial no referencial original (aqui indicado com a letra $\mathcal{R}$),

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{\mathcal{R}} \ .$$



Sendo assim

$$\vec{r_2'} - \vec{r_1'} = \vec{r_2} - \vec{\mathcal{R}} - (\vec{r_1} - \vec{\mathcal{R}}) = \vec{r_2} - \vec{r_1} \ .$$

(Em tempo. Pode-se generalizar para eixos não paralelos, e até mesmo não ortogonais, mas é desnecessário nas aplicações que ora consideramos.)

E (derivando-se em relação ao tempo) as velocidades relativas são preservadas em mudanças entre referenciais (sempre respeitada a condição comentada à página 60); $\vec{v_2'} - \vec{v_1'} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$. Também, $\vec{v'} = \vec{v} - \vec{\mathcal{V}}$, onde $\vec{\mathcal{V}}$ é a velocidade do novo referencial em relação ao original.

O princípio da conservação da quantidade de movimento em sistemas isolados (página 51) é preservado entre referenciais inerciais. Se

$$m_1\,\vec{v}_{\text{final}\,1} + m_2\,\vec{v}_{\text{final}\,2} = m_1\,\vec{v}_{\text{inicial}\,1} + m_2\,\vec{v}_{\text{inicial}\,2}$$

então

$$m_1\,(\vec{v}\,'_{\text{final}\,1} + \vec{\mathcal{V}}) + m_2\,(\vec{v}\,'_{\text{final}\,2} + \vec{\mathcal{V}}) = m_1\,(\vec{v}\,'_{\text{inicial}\,1} + \vec{\mathcal{V}}) + m_2\,(\vec{v}\,'_{\text{inicial}\,2} + \vec{\mathcal{V}})$$

$$m_1\,\vec{v}\,'_{\text{final}\,1} + m_2\,\vec{v}\,'_{\text{final}\,2} = m_1\,\vec{v}\,'_{\text{inicial}\,1} + m_2\,\vec{v}\,'_{\text{inicial}\,2} \quad .$$

5.1 Colisões elásticas

Conservam a energia cinética,

$$\frac{1}{2}\,m_1\,v^2_{\text{final}\,1} + \frac{1}{2}\,m_2\,v^2_{\text{final}\,2} = \frac{1}{2}\,m_1\,v^2_{\text{inicial}\,1} + \frac{1}{2}\,m_2\,v^2_{\text{inicial}\,2} \quad .$$

Sob transformações de referenciais inerciais o caráter elástico é conservado (produto escalar à página 17),

$$\frac{1}{2}\,m_1\,\vec{v}_{\text{f}\,1}.\vec{v}_{\text{f}\,1} + \frac{1}{2}\,m_2\,\vec{v}_{\text{f}\,2}.\vec{v}_{\text{f}\,2} = \frac{1}{2}\,m_1\,\vec{v}_{\text{i}\,1}.\vec{v}_{\text{i}\,1} + \frac{1}{2}\,m_2\,\vec{v}_{\text{i}\,2}.\vec{v}_{\text{i}\,2}$$

$$m_1(\vec{v'}_{\text{f}\,1}+\vec{\mathcal{V}}).(\vec{v'}_{\text{f}\,1}+\vec{\mathcal{V}}) + m_2(\vec{v'}_{\text{f}\,2}+\vec{\mathcal{V}}).(\vec{v'}_{\text{f}\,2}+\vec{\mathcal{V}}) = \\ m_1(\vec{v'}_{\text{i}\,1}+\vec{\mathcal{V}}).(\vec{v'}_{\text{i}\,1}+\vec{\mathcal{V}}) + m_2(\vec{v'}_{\text{i}\,2}+\vec{\mathcal{V}}).(\vec{v'}_{\text{i}\,2}+\vec{\mathcal{V}})$$

$$m_1(v'^{\,2}_{\text{f}_1} + 2\,\vec{v'}_{\text{f}\,1}.\vec{\mathcal{V}} + \mathcal{V}^2) + m_2(v'^{\,2}_{\text{f}_2} + 2\,\vec{v'}_{\text{f}\,2}.\vec{\mathcal{V}} + \mathcal{V}^2) = \\ m_1(v'^{\,2}_{\text{i}_1} + 2\,\vec{v'}_{\text{i}\,1}.\vec{\mathcal{V}} + \mathcal{V}^2) + m_2(v'^{\,2}_{\text{i}_2} + 2\,\vec{v'}_{\text{i}\,2}.\vec{\mathcal{V}} + \mathcal{V}^2)$$

$$m_1 v'^{\,2}_{\text{f}_1} + m_2 v'^{\,2}_{\text{f}_2} + 2\,(m_1\vec{v'}_{\text{f}\,1} + m_2\vec{v'}_{\text{f}\,2}).\vec{\mathcal{V}} = m_1 v'^{\,2}_{\text{i}_1} + m_2 v'^{\,2}_{\text{i}_2} + 2\,(m_1\vec{v'}_{\text{i}\,1} + m_2\vec{v'}_{\text{i}\,2}).\vec{\mathcal{V}} \quad .$$

As parcelas em $\vec{\mathcal{V}}$ se anulam pela conservação da quantidade de movimento, donde

$$\frac{1}{2}\,m_1\,v'^{\,2}_{\text{final}\,1} + \frac{1}{2}\,m_2\,v'^{\,2}_{\text{final}\,2} = \frac{1}{2}\,m_1\,v'^{\,2}_{\text{inicial}\,1} + \frac{1}{2}\,m_2\,v'^{\,2}_{\text{inicial}\,2} \quad .$$

As colisões elásticas conservam o módulo da velocidade relativa. Pois—ao conservar a energia cinética—no referencial de centro de massa (no qual afastamento e aproximação acontecem sobre retas[48]) cada corpo tem após a colisão (afastamento) velocidade de sentido contrário, e mesmo módulo, à que tinha antes da colisão (aproximação), e pode-se escrever

[48]Retas, em geral, diferentes.

$$v_{\text{afastamento, 2 em relação ao 1, referencial centro massa}} = v_{\text{aproximação, 2 em relação ao 1, referencial centro massa}}$$

(igualdade de módulos), e tratando-se de distâncias por unidade de tempo então

$$v_{\text{relativa após a colisão}} = v_{\text{relatuva antes da colisão}}$$

independentemente do referencial (conforme a nota 47).

Teorema. *Na colisão elástica com massas iguais e um dos corpos parado (alvo) as trajetórias finais são perpendiculares.*

$$\begin{cases} p_{x_{\text{final}}} = p_{x_{\text{inicial}}} \\ p_{y_{\text{final}}} = p_{y_{\text{inicial}}} \\ e_{\text{cinética final}} = e_{\text{cinética inicial}} \end{cases}$$

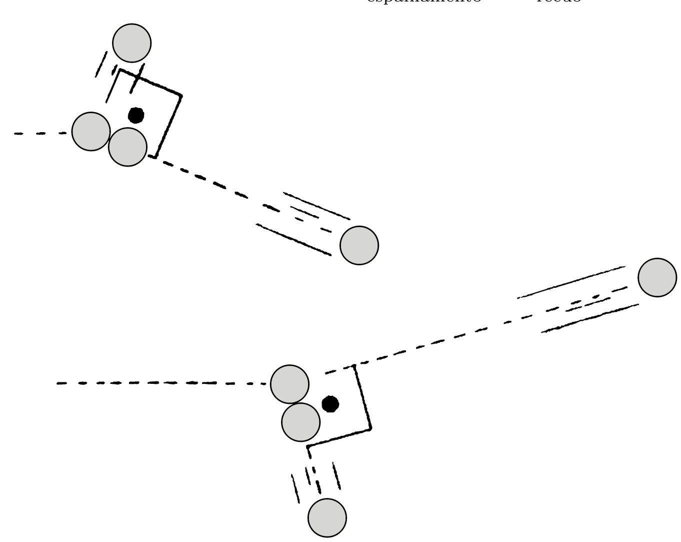
$$\begin{cases} m\,v_1 \cos\theta_{\text{espalhamento}} + m\,v_2 \cos\theta_{\text{recuo}} = m\,v_{\text{inicial}} \\ m\,v_1\,\text{sen}\theta_{\text{espalhamento}} - m\,v_2\,\text{sen}\theta_{\text{recuo}} = 0 \\ \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 + \frac{1}{2}\,m\,v_2^2 = \frac{1}{2}\,m\,v_{\text{inicial}}^2 \end{cases}$$

Elevando ao quadrado as duas primeiras equações e somando tem-se

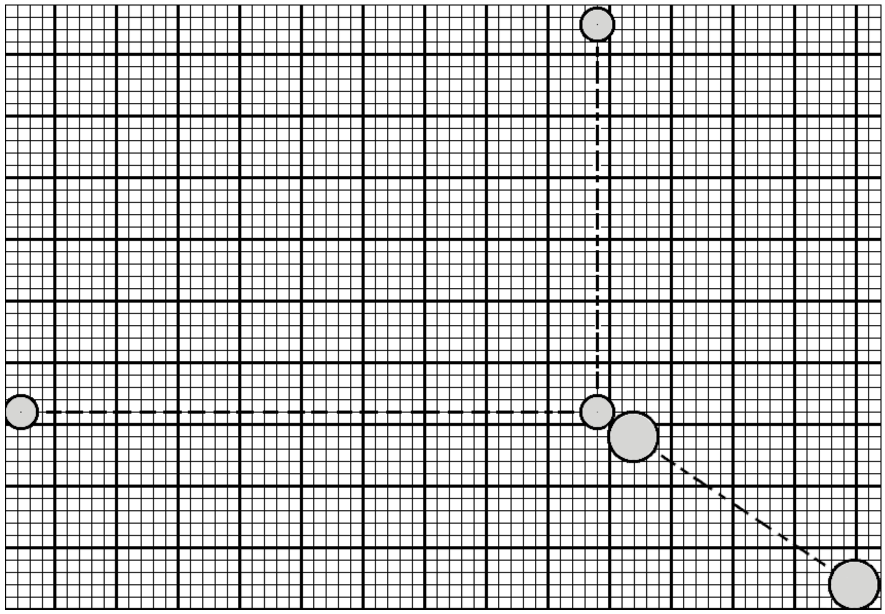
$$v_1^2 + 2\,v_1 v_2 \left(\cos\theta_{\text{ espalhamento}} \cos\theta_{\text{recuo}} - \text{sen}\theta_{\text{espalhamento}}\,\text{sen}\theta_{\text{recuo}}\right) + v_2^2 = v_{\text{inicial}}^2 \ .$$

Mas $v_1^2 + v_2^2 = v_{\text{inicial}}^2$ pela terceira igualdade donde

$$\begin{aligned} \cos\theta_{\text{espalhamento}} \cos\theta_{\text{recuo}} - \text{sen}\theta_{\text{espalhamento}}\,\text{sen}\theta_{\text{recuo}} &= 0 \\ \cos\left(\theta_{\text{espalhamento}} + \theta_{\text{recuo}}\right) &= 0 \\ \theta_{\text{espalhamento}} + \theta_{\text{recuo}} &= 90^\circ \ . \end{aligned}$$



Problema 52



Uma bola de massa 10 g e velocidade 23,4 cm/s colide com outra parada (alvo) de massa 26 g e é espalhada perpendicularmente com velocidade 15,6 cm/s. Obtenha o ângulo e a velocidade de recuo, as energias cinéticas final e inicial e a velocidades relativa final em módulo.

$$\begin{cases} p_{\text{final}_x} &= p_{\text{inicial}_x} \\ p_{\text{final}_y} &= p_{\text{inicial}_y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26\, v_{\text{recuo}_x} = 10\,.\,23{,}4 & \longrightarrow \quad v_{\text{recuo}_x} = 9\,\text{cm/s}\ . \\ 10\,.\,15{,}6 + 26\, v_{\text{recuo}_y} = 0 & \longrightarrow \quad v_{\text{recuo}_y} = -6\,\text{cm/s}\ . \end{cases}$$

$$\theta_{\text{recuo}} = \arctan\frac{6}{9} = 33^\circ\,41'\,24''\ .$$

$$v_{\text{recuo}} = \sqrt{9^{\,2}+6^{\,2}} = 10{,}8166\,\text{m/s}\ .$$

$$e_{\text{cinética final}} = \frac{1}{2}\,26\ 10{,}8166^{\,2} + \frac{1}{2}\,10\ 15{,}6^{\,2} = 2\,737{,}8\,\text{erg}\ .$$

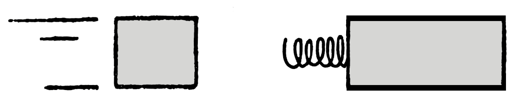
$$e_{\text{cinética inicial}} = \frac{1}{2}\,10\ 23{,}4^{\,2} = 2\,737{,}8\,\text{erg}\ .$$

$$v_{\text{relativa final}\,x} = 9\,\text{m/s}$$

$$v_{\text{relativa final}\,y} = 15{,}6 + 6 = 21{,}6\,\text{m/s}$$

$$v_{\text{relativa final}} = 23{,}4\,\text{m/s}\ .$$

Problema 53



Um bloco de massa 2 kg e velocidade 9 m/s colide elástica e frontalmente com outro bloco, de massa 4 kg, parado. Calcule as velocidades finais.

$$\begin{cases} m_1\, v_{\text{final}_1} + m_2\, v_{\text{final}_2} = m_1\, v_{\text{inicial}_1} \\ \dfrac{1}{2}\, m_1\, v^2_{\text{final}_1} + \dfrac{1}{2}\, m_2\, v^2_{\text{final}_2} = \dfrac{1}{2}\, m_1\, v^2_{\text{inicial}_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\, v_{\text{final}_1} + 4\, v_{\text{final}_2} = 2\,.\,9 \\ 2\, v^2_{\text{fim/snal}_1} + 4\, v^2_{\text{final}_2} = 2\,.\,9^2 \end{cases}$$

Isolando v_{final_2} na primeira equação e substituindo na segunda tem-se

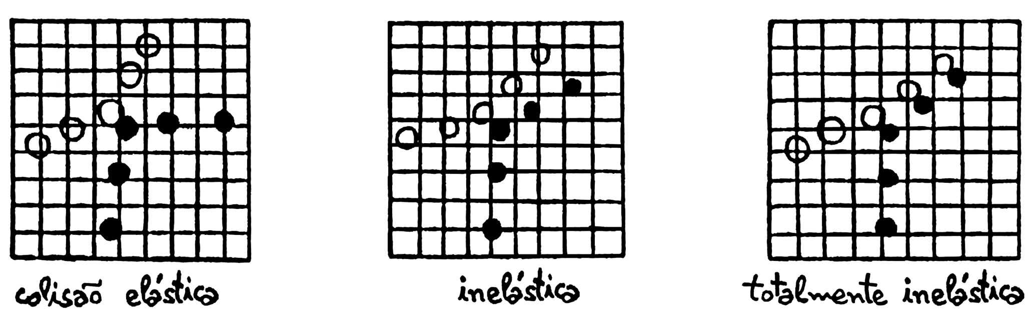
$$v^2_{\text{final}_1} - 6\, v_{\text{final}_1} - 27 = 0$$

donde

$$v_{\text{final}_1} = -3\,\text{m/s} \qquad \text{e} \qquad v_{\text{final}_2} = 6\,\text{m/s} \;.$$

5.2 Colisões inelásticas

Não restituem a velocidade relativa em módulo.



Na colisão totalmente inelástica os corpos resultam solidários.

Coeficiente de restituição (η) é a relação entre os módulos das velocidades relativas, final e inicial.

Elasticidade é a relação entre as energias cinéticas final e inicial *no referencial de centro de massa*[49].

[49] Aquele no qual é nula a velocidade do centro de massa.

Problema 54

Uma bola de massa 3 kg é lançada com velocidade 10 m/s para dentro de um cano de massa 6 kg em repouso. O cano possui em seu interior uma mola de constante elástica 5 000 N/m acoplada a uma trava especial que prende a mola em sua posição de máxima compressão (conforme figura). O atrito é desprezível. Calcule a velocidade final do sistema e a compressão da mola.

A conservação da quantidade de movimento é

$$m_{\text{bola}_{\text{final}}}\, v_{\text{bola}_{\text{final}}} + m_{\text{cano}_{\text{final}}}\, v_{\text{cano}_{\text{final}}} = m_{\text{bola}_{\text{inicial}}}\, v_{\text{bola}_{\text{inicial}}} \quad .$$

A segunda equação é a igualdade das velocidades finais,

$$v_{\text{cano}_{\text{final}}} = v_{\text{bola}_{\text{final}}} \quad ,$$

daí

$$3\, v_{\text{final}} + 6\, v_{\text{final}} = 3\,.10$$

$$v_{\text{final}} = 3,3\,\text{m/s} \quad .$$

Pela conservação da energia total se obtém a compressão da mola.

$$\frac{1}{2}\, m_{\text{bola}_{\text{final}}}\, v^2_{\text{bola}_{\text{final}}} + \frac{1}{2}\, m_{\text{cano}_{\text{final}}}\, v^2_{\text{cano}_{\text{final}}} + \frac{1}{2}\,\text{K}\, \triangle s^2 = \frac{1}{2}\, m_{\text{bola}_{\text{inicial}}}\, v^2_{\text{bola}_{\text{inicial}}}$$

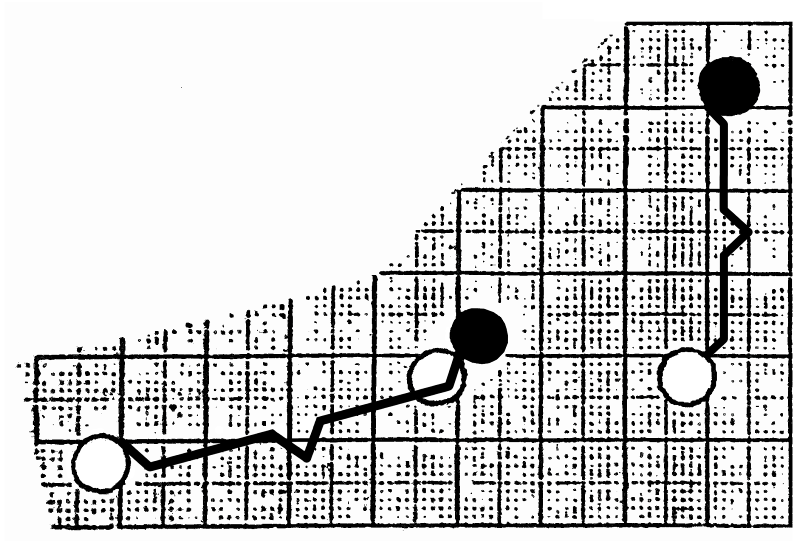
$$\triangle s = 0,2\,\text{m} \quad .$$

A energia cinética final é $\frac{1}{2}\,(m_{\text{bola}} + m_{\text{cano}})\, v_{\text{final}} = 50\,\text{J}$ e a inicial, $\frac{1}{2}\, m_{\text{bola}}\, v_{\text{inicial}} = 150\,\text{J}$. Energia $\frac{1}{2}\,\text{K}\,\triangle s^2 = 100\,\text{J}$ restou acumulada na mola.

Coeficiente de restituição nulo. A elasticidade é nula.

Problema 55

Qual é o coeficiente de restituição da colisão do problema 16 página 51?



Da figura (sobre fotografia estroboscópica veja-se página 52),

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{3}{\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{17}} \\ &= 0{,}73 \ . \end{aligned}$$

Para obter a elasticidade consideremos desprezíveis as dimensões das bolas[50] .

$$\text{Elasticidade} = \frac{\text{energia cinética final no referencial de centro de massa}}{\text{energia cinética inicial no referencial de centro de massa}} \ .$$

$$\vec{v}_{\substack{\text{no referencial}\\ \text{de centro de massa}}} = \vec{v}_{\text{no referencial original}} - \vec{v}_{\substack{\text{centro de massa}\\ \text{no referencial original}}} \ .$$

$$\vec{v}_{\substack{\text{centro de massa}\\ \text{no referencial original}}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad \text{(páginas 54 e 55)}$$

(Massas na relação 3/1, página 51.)

$$= \frac{3\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}}{3+1} \qquad \text{(no caso, das posições finais)}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\3/4\end{pmatrix} \text{unidades de velocidade.}$$

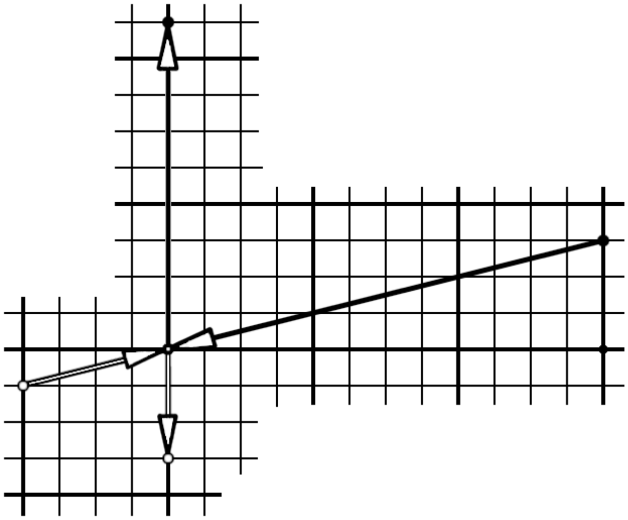
$$\vec{v}_{\substack{\text{branca,}\\ \text{no ref. centro massa,}\\ \text{final}}} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3/4\end{pmatrix} \text{unidades.}$$

$$\vec{v}_{\substack{\text{preta,}\\ \text{no ref. centro massa,}\\ \text{final}}} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\9/4\end{pmatrix} \text{unidades.}$$

$$\vec{v}_{\substack{\text{branca,}\\ \text{no ref. centro massa,}\\ \text{inicial}}} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1/4\end{pmatrix} \text{unidades.}$$

$$\vec{v}_{\substack{\text{preta,}\\ \text{no ref. centro massa,}\\ \text{inicial}}} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3/4\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}3\\3/4\end{pmatrix} \text{unidades.}$$

[50] De modo a não interferir nos cálculos das velocidades.

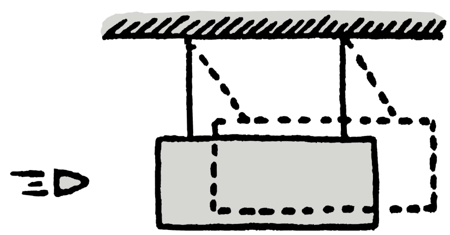


$$\text{Elasticidade} = \frac{\frac{1}{2}\left[3\begin{pmatrix}0\\-3/4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-3/4\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\9/4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\9/4\end{pmatrix}\right]}{\frac{1}{2}\left[3\begin{pmatrix}1\\1/4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1/4\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-3\\-3/4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3/4\end{pmatrix}\right]} = \frac{3\frac{9}{16}+\frac{81}{16}}{3\left(1+\frac{1}{16}\right)+\left(9+\frac{9}{16}\right)} = 0,53$$

(produto escalar à página 17).

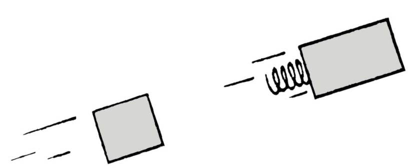
Quatro problemas propostos

1 - Uma bala de revólver com massa 10 g atinge horizontalmente um pêndulo com massa 2 kg inicialmente parado. A bala resultou cravada no interior do pêndulo e a oscilação elevou-o a uma altura máxima 11,25 cm acima de seu nível de repouso. Calcule a velocidade da bala ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$).



301,5 m/s.

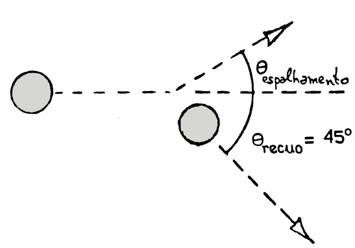
2 - Um bloco de massa 2 kg e velocidade 10 m/s alcança um segundo bloco (munido de uma mola) de massa 5 kg e velocidade 3 m/s. A constante elástica é 1 120 N/m. Qual é a máxima compressão da mola?



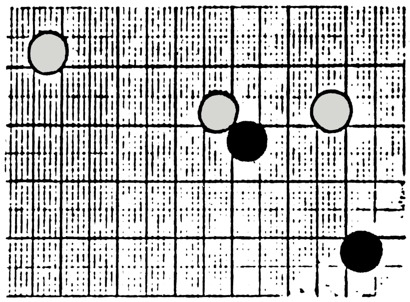
0,25 m.

3 - Uma esfera de massa 1,73 g e velocidade 54,65 m/s colide elasticamente com uma segunda esfera de massa 1 g, parada, a qual recua segundo um ângulo de 45°.

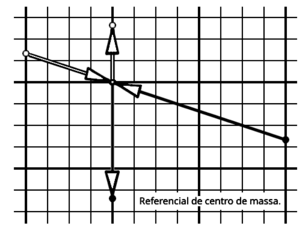
Pede-se o ângulo de espalhamento e as velocidades finais.



30°; 40 m/s; 49 m/s.



4 - Obtenha a restituição e a elasticidade desta colisão. (Considere dimensões desprezíveis dos corpos.)



0,63; 0,40.

Índice